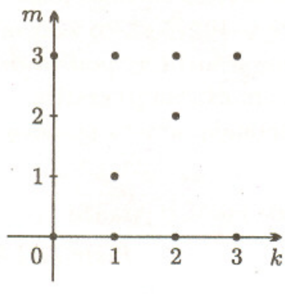
mała delta

Przeprawy

Wiele starych łamigłówek ma za temat różne przeprawy przez rzekę. Chyba najsłynniejszą z nich jest – pochodzące z ósmego wieku – zadanie mnicha Alkuina: należy przewieźć na drugi brzeg rzeki wilka, kozę i kapustę łodzią, w której (oprócz wiosłującego) mieści się tylko jedno z nich; nie można przy tym zostawić wilka sam na sam z kozą ani kozy sam na sam z kapustą.

Przyjemność rozwiązania zadania Alkuina pozostawimy tym Czytelnikom, którzy go wcześniej nie znali, a sami zajmiemy się inną – również nieźle znaną – łamigłówką: o kanibalach i misjonarzach.

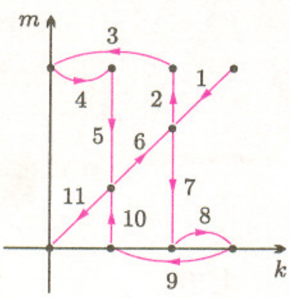
Sytuacja jest następująca: trzej misjonarze i trzej kanibale chcą przeprawić się na drugi brzeg rzeki. Mają łódkę, która za jednym razem może przewieźć najwyżej dwie osoby. Jeśli w pewnym momencie na którymkolwiek brzegu rzeki kanibali będzie więcej od misjonarzy, to misjonarze zostaną zabici i zjedzeni. Czy cała szóstka może się bezpiecznie przeprawić na drugi brzeg?



Rys. 1

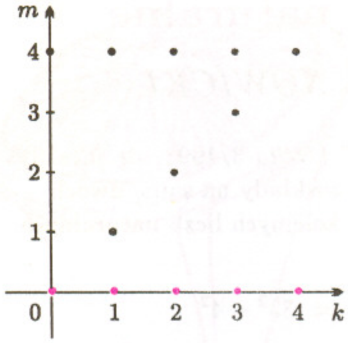
Rozważmy wszystkie możliwe stany liczebności misjonarzy i kanibali na tym brzegu, z którego wyrusza przeprawa. (Każdemu takiemu stanowi odpowiadają – jednoznacznie wyznaczone! – liczba kanibali i liczba misjonarzy na drugim brzegu, więc nie musimy oddzielnie rozważać, co dzieje się u celu przeprawy.) Oznaczmy przez m liczbę misjonarzy, a przez k – liczbę kanibali. Możliwe wartości m i k to 0, 1, 2, 3, więc łącznie mamy $4 \cdot 4 = 16$ różnych stanów. Trzeba jednak wykluczyć stany, odpowiadające sytuacjom, w których na jednym z brzegów rzeki kanibali jest więcej od misjonarzy, a więc stany, w których m i k są różnymi liczbami niezerowymi. Zostaje dziesięć stanów *dopuszczalnych*; każdy z nich jest na rysunku 1 oznaczony kropką w układzie współrzędnych.

Zamiast planować przeprawę, będziemy łączyć kropki strzałkami. Każda strzałka odpowiada jednemu kursowi łódki przez rzekę. Zaczynamy od prawego górnego rogu ($m = 3$, $k = 3$). Każda strzałka musi obrazować przewiezienie jednej lub dwóch osób przez rzekę. Trzeba też pamiętać, że po każdej strzałce skierowanej w lewo lub w dół musi następować strzałka w prawo lub w górę (czyli powrót łódki z drugiego brzegu).

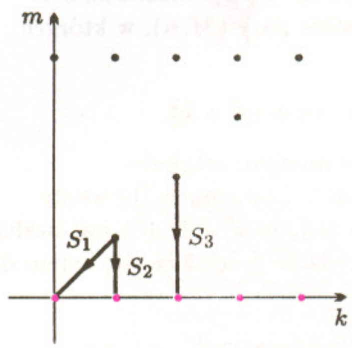


Rys. 2

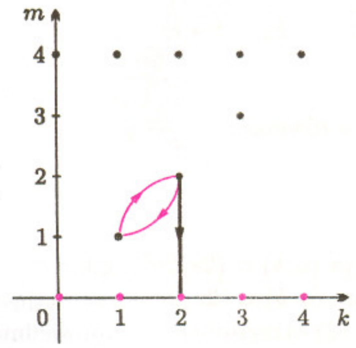
Metodą prób i błędów dość szybko odkryjemy, że są cztery układy strzałek, które prowadzą do rozwiązania łamigłówki. Jedno z rozwiązań przedstawia rysunek 2. Przewiezienie całej szóstki przez rzekę wymaga jedenastu kursów łódki. Pozostałe trzy rozwiązania Czytelnik z łatwością narysuje sam.



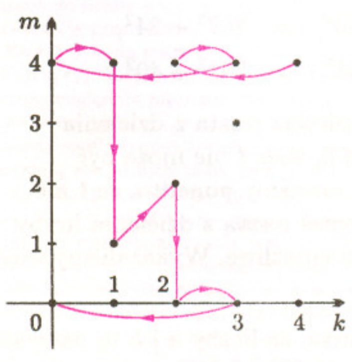
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Zapytajmy teraz, czy w podobnych warunkach, dysponując dwuosobową łódką, przez rzekę może się przeprawić czterech kanibali i czterech misjonarzy. Odpowiedź tym razem jest przecząca: bezpiecznej przeprawy nie ma. Spróbujmy się przekonać o prawdziwości tego twierdzenia.

Jak poprzednio, zaznaczmy kropkami w układzie współrzędnych dopuszczalne stany liczebności kanibali i misjonarzy na jednym z brzegów rzeki (rysunek 3). Przypuśćmy, że przeprawa jednak jest możliwa. Rozważmy przeprawę, która wymaga najmniejszej liczby kursów łódki przez rzekę i wyobraźmy sobie układ strzałek odpowiadający takiej przeprawie. Przypatrzmy się bliżej pierwszej strzałce, która kończy się w jednej z kropek oznaczonych kolorem (tzn. rozważmy pierwszy moment, gdy wszyscy misjonarze znaleźli się na drugim brzegu rzeki). Nietrudno stwierdzić, że musiałaby to być jedna z trzech strzałek zaznaczonych na rysunku 4. Gdyby była to strzałka S_1, łącząca punkty $(1,1)$ i $(0,0)$, to poprzednia strzałka musiałaby mieć początek w punkcie $(1,0)$. Wtedy jednak na linii kolorowych kropek musielibyśmy znaleźć się po raz pierwszy już wcześniej – mamy więc sprzeczność. Gdyby pierwszą strzałką, kończącą się w kolorowym punkcie, była strzałka S_2, to wówczas zamiast niej moglibyśmy równie dobrze narysować strzałkę S_1 i od razu zakończyć przeprawę, zmniejszając liczbę kursów łódki. Znów mamy sprzeczność, bo rozważana przeprawa miała być najkrótsza.

Gdyby wreszcie pierwszą strzałką z kolorowym końcem była strzałka S_3, to poprzednie dwa kursy łódki musiałyby odpowiadać strzałkom, które na rysunku 5 są zaznaczone kolorem. Wtedy jednak obie kolorowe strzałki, tworzące zamkniętą pętelkę, moglibyśmy z zaplanowanego schematu przeprawy usunąć i zmniejszyć liczbę kursów łódki o 2, co kłóci się z tym, że rozważamy przeprawę najkrótszą z możliwych. Po raz trzeci trafiliśmy więc na sprzeczność, a to oznacza, że najkrótsza bezpieczna przeprawa nie istnieje. Nie istnieje więc żadna bezpieczna przeprawa.

Czy jest na to rada? Okazuje się, że tak. Trzeba zwiększyć łódkę. Jeśli łódka może pomieścić trzech pasażerów, i przyjmiemy, że ani w łódce, ani na brzegu kanibale nie mogą przewyższyć liczebnością misjonarzy, to cała ósemka zdoła się bezpiecznie przeprawić (rysunek 6).

Pięciu kanibali i pięciu misjonarzy również może się bezpiecznie przeprawić, dysponując łódką, która mieści trzech pasażerów, lecz sześciu kanibali i sześciu misjonarzy – nie może. Wskazanie rozwiązania w pierwszym przypadku i uzasadnienie, że w drugim przypadku bezpiecznej przeprawy nie ma, pozostawiamy Czytelnikowi.

Żeby bezpiecznie przewieźć przez rzekę sześciu kanibali i sześciu misjonarzy, trzeba mieć łódkę czteroosobową. I nie ma już co rozważać większych wycieczek: dowolna grupa złożona z jednakowej liczby kanibali i misjonarzy może się bezpiecznie przeprawić przez rzekę za pomocą łódki, która mieści czterech lub więcej pasażerów. Musimy po prostu wybrać jednego kanibala i jednego misjonarza, którzy zasiądą przy wiosłach, spluną w dłonie i będą przewozić całą resztę parami – za każdym razem jednego kanibala i jednego misjonarza – tak długo, aż cel zostanie osiągnięty.

Małą Deltę przygotował Paweł STRZELECKI