Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1999

Przypominamy treść zadań:

274. Stała słoneczna, czyli moc promieniowania słonecznego na jednostkę powierzchni prostopadłej, jest w okolicach Ziemi równa $I = 1{,}35\ \mathrm{kW/m^2}$. W próżni kosmicznej umieszczono prostopadle do promieni słonecznych czarną płytę z materiału izolacyjnego o współczynniku przewodnictwa cieplnego równym $\lambda = 0{,}3\ \mathrm{W/(m{\cdot}K)}$ i grubości $d = 10$ cm (a pozostałych rozmiarach znacznie większych). Obliczyć numerycznie temperaturę, jaką po dłuższym czasie osiągnie każda ze stron płyty. Stała Stefana–Boltzmanna wynosi $\sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2K^4)}$.

275. Załóżmy, że siła elektromotoryczna termopary zbudowanej z przewodników A i B jest proporcjonalna do różnicy temperatur styków (jest to słuszne dla niedużych wartości tej różnicy):

$$\mathcal{E}_{AB} = \alpha_{AB}(T_1 - T_2).$$

Stałej α_{AB} przypiszemy znak dodatni wtedy, gdy w styku gorącym prąd płynie od przewodnika A do B, a ujemny w przeciwnym przypadku.
1. Udowodnić, że $\alpha_{AB} + \alpha_{BC} = \alpha_{AC}$.
2. W obwodzie składającym się z trzech przewodników A, B i C temperatura styku AB jest równa T_1, temperatura styku BC jest równa T_2, a temperatura styku AC jest równa T_3. Wyznaczyć siłę elektromotoryczną takiej „termotrójki”.

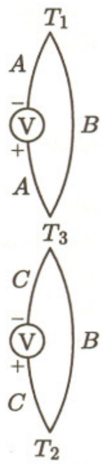
274. Oznaczmy szukane temperatury przez T_1 i T_2. Z bilansu energii otrzymujemy

$$I = \sigma(T_1^4 + T_2^4),$$

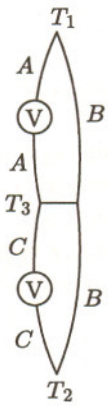
przy czym energia wypromieniowana z chłodniejszej strony musi być równa strumieniowi ciepła dopływającego od strony cieplejszej:

$$\lambda(T_1 - T_2)/d = \sigma T_2^4.$$

Próba rozwiązania analitycznego prowadzi do równania *bardzo* wysokiego stopnia. Analiza numeryczna daje wynik $T_1 \approx 369$ K, $T_2 \approx 269$ K.



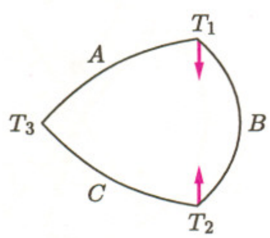
Rys. 1



Rys. 2

275. Przyjmijmy, że styki termopary AB mają temperatury T_1 i T_3, styki termopary BC – temperatury T_2 i T_3, a odpowiednie woltomierze (rys. 1) mierzą siły elektromotoryczne $\mathcal{E}_{AB} = \alpha_{AB}(T_1 - T_3)$ i $\mathcal{E}_{BC} = \alpha_{BC}(T_2 - T_3)$. Zaznaczone na rysunku znaki napięć odpowiadają sytuacji, gdy $T_1 > T_3$, $T_2 > T_3$, a oba współczynniki α są dodatnie. Zetknięcie styków o jednakowej temperaturze T_3 nie spowoduje – oczywiście – żadnej zmiany we wskazaniach mierników. Tak samo żadna istotna zmiana nie nastąpi, gdy „rozciągniemy” ten wspólny styk (rys. 2); poziomy odcinek przewodu na rysunku może być wykonany np. z przewodnika B. Dokonajmy teraz przeniesienia woltomierza z górnej gałęzi obwodu do tego poziomego odcinka. Z II prawa Kirchhoffa wynika, że przeniesiony woltomierz nie zmieni wskazania, natomiast dolny woltomierz zacznie wskazywać łączną siłę elektromotoryczną, równą sumie $\mathcal{E}_{AB} + \mathcal{E}_{BC}$. W następnym kroku usuńmy poziomy odcinek z przeniesionym woltomierzem – ponieważ i tak nie płynął tamtędy prąd (zakładamy, że woltomierze są doskonałe), więc w pozostałym obwodzie nie zajdzie żadna zmiana. Temperatura T_3 staje się w tym momencie istotna tylko dla styku AC, gdyż zmiany temperatury wzdłuż jednorodnego przewodu B nie mają znaczenia. Jak widać, otrzymaliśmy rozwiązanie punktu 2:

$$\mathcal{E} = \alpha_{AB}(T_1 - T_3) + \alpha_{BC}(T_2 - T_3).$$



Rys. 3

Połóżmy teraz $T_1 = T_2$ i zetknijmy styki AB i BC (rys. 3). Stosując rozumowanie odwrotne do powyższego, przekonamy się, że podczas zetknięcia nie zmieni się siła elektromotoryczna w części AC, natomiast część B można odrzucić – czyli pozostaje termopara AC. Wynika stąd natychmiast dowód punktu 1.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1999

Przypominamy treść zadań:

377. Rozważamy wielomian $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ zmiennej zespolonej z, o współczynnikach zespolonych. Dowieść, że jeżeli wszystkie pierwiastki wielomianu $P(z)$ są liczbami zespolonymi o module 1, to również wszystkie pierwiastki wielomianu $Q(z) = z^3 + |a|z^2 + |b|z + |c|$ są liczbami zespolonymi o module 1.

378. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej k istnieją dwie kolejne liczby naturalne, z których każda ma co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 369 (WT=1,99) i 370 (WT=3,17) z numeru 11/1998

Witold Bednarek	– Łódź	44,99
Zbigniew Skalik	– Pyskowice	44,04
Witold Bednorz	– Tychy	43,87
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	42,19
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	38,82

Witamy nowych członków **Klubu 44 M**: pana Bednarka i pana Skalika.

377. Niech z_1, z_2, z_3 będą pierwiastkami wielomianu $P(z)$; $|z_j| = 1$, więc $1/z_j = \overline{z_j}$ dla $j = 1, 2, 3$. W myśl wzorów Viète'a: $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$, $c = -z_1 z_2 z_3$,

$$b = z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 = -(c/z_1) - (c/z_2) - (c/z_3) = -c(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) = \overline{a}c.$$

Zatem $|c| = 1$, $|b| = |a| \leq 3$; wielomian $Q(z)$ ma postać $Q(z) = z^3 + |a|z^2 + |a|z + 1$; jednym z jego pierwiastków jest liczba -1.

Dzieląc $Q(z)$ przez dwumian $z + 1$, dostajemy trójmian kwadratowy $T(z) = z^2 + dz + 1$, gdzie $d = |a| - 1$. Skoro $|a| \leq 3$, to $|d| \leq 2$, więc wyróżnik trójmianu $T(z)$, równy $d^2 - 4$, nie jest dodatni. Wobec tego pierwiastki trójmianu $T(z)$ tworzą parę liczb zespolonych sprzężonych (w szczególnym przypadku może to być podwójny pierwiastek rzeczywisty). Moduły tych pierwiastków są równe, a ich iloczyn wynosi 1 (wzór Viète'a). Stąd wniosek, że oba te pierwiastki są liczbami zespolonymi o module 1.

378. Wybierzmy dowolnie $2k$ różnych liczb pierwszych $p_1, \ldots, p_{2k}$. Liczby $m = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ oraz $n = p_{k+1} \cdot \ldots \cdot p_{2k}$ są względnie pierwsze, więc istnieją liczby całkowite x, y spełniające równanie $mx - ny = 1$. Skoro $m, n \geq 2$, liczby mx i ny są jednocześnie dodatnie lub ujemne. Tak więc $|mx|$ i $|ny|$ są dwiema kolejnymi liczbami naturalnymi, a każda z nich ma co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

Zadania

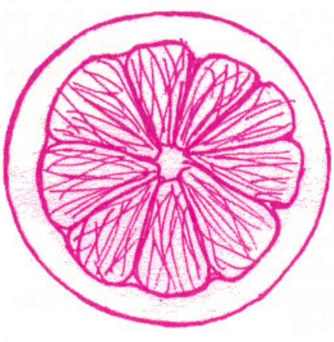
Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 886. Niech a, b, x_0 będą liczbami naturalnymi. Udowodnić, że w ciągu (x_i), takim, że $x_n = ax_{n-1} + b$ $(n \geq 1)$, jest nieskończenie wiele liczb złożonych.
Rozwiązanie na str. 11

M 887. Wykazać, że jeśli żadna z liczb a, $a + d$, $a + 2d$, $\ldots$, $a + (n-1)d$ nie dzieli się przez n, to liczby d i n nie są względnie pierwsze.
Rozwiązanie na str. 3

M 888. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej m istnieje liczba podzielna przez m, której zapis dziesiętny zawiera tylko zera i jedynki.
Rozwiązanie na str. 5

Redaguje Ewa CZUCHRY



F 503. Krótkowidz po zdjęciu okularów może czytać książkę, trzymając ją w odległości 16 cm od oczu. Jaka jest zdolność skupiająca okularów? Przyjąć, że normalna odległość dobrego widzenia wynosi 30 cm.
Rozwiązanie na str. 4

F 504. Na dnie akwarium, napełnionego wodą do wysokości 10 cm, umieszczono punktowe źródło światła. Na powierzchni wody unosi się okrągła nieprzezroczysta płytka tak, że jej środek znajduje się pionowo nad źródłem światła. Jaki jest najmniejszy promień płytki, przy którym ani jeden promień światła nie może wyjść przez powierzchnię wody? Współczynnik załamania woda-powietrze wynosi 1,33.
Rozwiązanie na str. 2