7/99 (19)

Γ-limatias $_{n\to\infty}$

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (17′)

Wyjaśnienie oszustwa (17):

Pierwsza całka została błędnie obliczona: $(y^2)^{5/2}$ nie jest równe y^5, lecz $|y|^5$.

Poprawny rachunek powinien wyglądać następująco:

$$\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^{3/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_{x=y^2}^{1}\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{5}|y|^5\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \left(\frac{2y}{5}-\frac{y^5|y|}{15}\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2}{5}-\frac{1}{15}+\frac{2}{5}-\frac{1}{15}=\frac{4}{5}-\frac{2}{15}=\frac{2}{3}.$$

JWR

GRY (4)

Zanim poznasz dużo ciekawych gier, musisz się uzbroić w trochę cierpliwości, Drogi Czytelniku. Dziś dalej o grze *Nim*. Może pomyślisz, że gra *Nim* jest pępkiem świata, skoro poświęcamy jej tyle uwagi, ale tak jest w istocie: gra *Nim* jest pępkiem świata, oczywiście świata gier. Dopiero gdy znajdziesz się w tym świecie, będziesz mógł w pełni docenić to, o czym mówimy poniżej.

Wprowadźmy do gry *Nim* drobną modyfikację. Oprócz stosów, które brały udział w grze na dotychczasowych zasadach, i które będziemy w razie potrzeby nazywać stosami zwykłymi, wprowadźmy stos rezerwowy, rządzący się następującymi regułami. Na początku rozgrywki znajduje się w nim pewna liczba bierek. W trakcie rozgrywki można wykonywać ruchy na dotychczasowych zasadach, tzn. zabierać bierki ze stosów zwykłych – te bierki nie biorą udziału w dalszej grze. Pojawia się jednak nowy rodzaj dozwolonych posunięć: można przełożyć dowolną liczbę bierek ze stosu rezerwowego na dowolny stos zwykły, który dotąd nie został zlikwidowany. Wygrywa ten gracz, który zabierze wszystkie bierki z ostatniego stosu zwykłego. Reguła mówiąca, że zlikwidowane stosy nie mogą się odradzać, ma charakter czysto porządkowy i jest bez znaczenia dla istoty naszych rozważań.

Jak wygląda strategia wygrywająca w tak zmodyfikowanej grze? Jest taka sama jak w zwykłej grze *Nim*! Należy dążyć do podawania przeciwnikowi pozycji o dwójkowej sumie bierek w stosach zwykłych równej 0. To, co dzieje się ze stosem rezerwowym, jest zupełnie bez znaczenia. Istotne jest tylko to, że reguły gry nie pozwalają, aby gra toczyła się w nieskończoność. Stos rezerwowy daje możliwość wykonywania ruchów „do tyłu". Nie wpływa to w niczym na fakt, że każdy ruch zmienia dwójkową sumę bierek w stosach zwykłych – jeśli więc podamy przeciwnikowi pozycję o sumie 0, to w odpowiedzi otrzymamy pozycję o sumie dodatniej, niezależnie od tego, czy przeciwnik skorzystał ze stosu rezerwowego, czy też nie. Natomiast zawsze mamy możliwość przejścia od pozycji o sumie dodatniej do pozycji o sumie 0 – dokładnie taką samą, jaka istniała w zwykłej grze *Nim*. Jeżeli jesteśmy na pozycji wygrywającej, to stosu rezerwowego używać nie musimy! Niech go używa przeciwnik, i tak mu to nie pomoże. Kiedy tylko przełoży on bierki ze stosu rezerwowego na zwykły, to w kolejnym ruchu możemy te bierki odłożyć na bok, niejako cofając ruch wykonany przez przeciwnika.

Popatrzmy na przykład:

7 12 4 Rezerwowy : 5.

Ponieważ $7 +_2 4 = 3$, więc wygrywające posunięcie polega na zabraniu 9 bierek ze stosu drugiego, co prowadzi do pozycji

7 3 4 Rezerwowy : 5.

Jest to jedyne wygrywające posunięcie polegające na usuwaniu bierek ze stosów zwykłych. Jak już powiedzieliśmy, stosu rezerwowego możemy nie dotykać, ale jeśli chcemy... $12 +_2 4 = 8$, to możemy przełożyć 1 bierkę na pierwszy stos, prowadząc do pozycji

8 12 4 Rezerwowy : 4.

Natomiast $7 +_2 12 = 11$, skąd wynika, że wygrywający ruch z użyciem trzeciego stosu nie jest możliwy, gdyż wymagałby dołożenia 7 bierek, a w stosie rezerwowym jest ich tylko 5.

A co by było, gdyby graczowi usuwającemu bierki ze stosu zwykłego przyznać prawo wyboru: wyłączyć bierki z dalszej gry (czyli tak jak dotychczas) lub umieścić je w stosie rezerwowym? Pozornie wydaje się, że taka gra mogłaby się ciągnąć w nieskończoność. Łatwo bowiem wyobrazić sobie sytuację, kiedy jeden z graczy przekłada bierkę ze stosu rezerwowego na zwykły, drugi gracz tę samą bierkę przekłada z powrotem na stos rezerwowy, pierwszy na zwykły, drugi znowu na rezerwowy itd. Taka rozgrywka nie skończy się nigdy. Ale to tylko pozory! W praktyce bowiem ten z graczy, który jest na pozycji wygrywającej, będzie dążył do zakończenia gry i nie będzie przekładał bierek na stos rezerwowy, tylko usuwał je z gry. Jego przeciwnik nie ma możliwości przedłużania gry w nieskończoność. Gra zawsze się zakończy, o ile gracze będą grać w sposób przemyślany.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl