Środek ciężkości czy masy?

Wojciech KOPCZYŃSKI

Na początku było Słowo,...

Z pojęciem środka ciężkości zapoznałem się na szkolnych lekcjach fizyki. Natomiast z – wypranym z treści fizycznej – pojęciem środka masy zetknąłem się po raz pierwszy na wykładzie z matematyki, prowadzonym 34 lata temu przez Pana Andrzeja Mąkowskiego i mającym na celu przygotowanie do egzaminu wstępnego na Uniwersytet Warszawski. Studiowanie fizyki przekonało mnie, że środek masy jest czymś niezmiernie ważnym, a ze środkiem ciężkości ani w czasie studiów, ani podczas lektury fizycznej literatury naukowej chyba się nawet nie zetknąłem.

Zdziwił mnie ostatnio fakt, że obecnie uczniowie dowiadują się o środku masy na lekcjach fizyki (nie we wszystkich szkołach), a o środku ciężkości wyłącznie od matematyków: o „środku ciężkości trójkąta" z podręczników, a o innych „środkach ciężkości" z artykułów naszego Redaktora Naczelnego. Po co, pisząc o jednym – jak się wydaje – pojęciu, używać dwóch różnych określeń? A może pojęcia te czymś się różnią? Jeśli tak, to użycie którego z nich jest właściwsze?

Określmy te pojęcia, zaczynając od środka masy. Umieśćmy w punktach zaznaczonych wektorami wodzącymi $\mathbf{r}_k$ masy $m_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Ważoną masami miarą odległości tego układu cząstek (a jeśli ktoś woli, to punktów materialnych) od punktu zaznaczonego wektorem wodzącym $\mathbf{r}$ jest

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)^2.$$

Środek masy tego układu cząstek definiujemy jako punkt, w którym funkcja f osiąga minimum. Jeśli przez $\mathbf{R}$ oznaczymy promień wodzący tego punktu, to warunek znikania pochodnej funkcji f względem $\mathbf{r}$ daje

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_k / M,$$

przy czym $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ jest *całkowitą masą układu*. Żądanie, aby $m_k > 0$ dla każdego k, jest w przypadku tej funkcji warunkiem dostatecznym na (ostre) minimum. (Nieco słabszy warunek „dla każdego k zachodzi $m_k \geq 0$ oraz istnieje k, dla którego $m_k > 0$" jest nie tylko dostateczny, ale i konieczny.) Nie będę zagłębiał się w to, że środek masy izolowanego układu fizycznego porusza się ruchem prostoliniowym i jednostajnym, ani w to, iż fakt ten poprzez twierdzenie Noether wiąże się z niezmienniczością lagranżjanu (patrz: *Delta* 5/1998) względem przekształceń Galileusza, ani w wiele innych ciekawych faktów związanych z pojęciem środka masy.

Kto potrafi za pomocą komputera (ewentualnie ze skanerem), mapy Europy i rocznika statystycznego określić, gdzie leży środek ludności Europy? Radzę zacząć rozwiązywanie tego zagadnienia od dostosowania podanego określenia środka masy do zakrzywionej powierzchni Ziemi. Nadesłane do *Delty* najlepsze rozwiązanie Redakcja opublikuje, a autorowi wypłaci wierszówkę.

Przejdźmy do środka ciężkości. Nazwa ta sugeruje, że jest to pojęcie związane z układem sił grawitacyjnych. Niektórzy adepci fizyki są skłonni przypuszczać, że pojęcie środka dotyczy dowolnego układu sił. W *Delcie* podczas niedawnej dyskusji nad zadaniem na temat siły Coriolisa jeden z jej uczestników zauważył, że oprócz tej siły mogą pojawić się siły oporu i – o ile ich środek nie będzie pokrywał się ze środkiem masy – doprowadzą one do obrotu rozważanego w zadaniu ciała. Miał rację w tym względzie, że siły oporu mogą doprowadzić (łącznie z siłami Coriolisa) do obrotu, ale i nie miał racji, bo siły oporu ani siły Coriolisa na ogół nie mają środka. Tak czy inaczej środek układu sił $\mathbf{F}_k$, $k = 1, \ldots, n$, działających na układ n cząstek, wiąże się z obrotem układu cząstek jako całości, a o tym decyduje *całkowity moment sił względem punktu* O (początku układu kartezjańskiego):

$$\mathbf{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k.$$

Rozwiązanie zadania M 883.
Umieśćmy jednakowe masy w wierzchołkach czworokąta $ABCD$. Środek masy punktów materialnych A i B leży w środku odcinka AB, a środek masy C i D w środku CD; zatem środek masy czworokąta jest środkiem tego odcinka. Podobnie stwierdzamy, że środek masy jest środkiem każdego z pozostałych odcinków.

Gdy przesuwamy początek układu kartezjańskiego do punktu O', takiego, że $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{r}$, to wtedy $\mathbf{r}_k \mapsto \mathbf{r}_k - \mathbf{r}$, a całkowity moment sił przekształca się

Rozwiązanie zadania F 502.
Dla ciężaru ciała znajdującego się na równiku planety mamy z poprzedniego zadania równanie

$$Q_r = \mathrm{G}\frac{mM}{R^2} - \frac{4\pi^2 mR}{T^2}.$$

Zgodnie z warunkiem zadania $Q_r = 0$, czyli

$$\mathrm{G}\frac{M}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Masa planety o gęstości ϱ wynosi $\frac{4}{3}\pi R^3 \varrho$. Stąd otrzymujemy gęstość

$$\varrho = \frac{3\pi}{GT^2} \approx 19\ \mathrm{kg/m^3}.$$

następująco:

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

przy czym $\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k$ jest *całkowitą siłą* działającą na układ cząstek. Jeśli $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, to całkowity moment sił nie zależy od punktu, względem którego go obliczamy. Jeśli zaś $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, to całkowity moment sił nie zmienia się, gdy punkt, względem którego go obliczamy, pozostaje na prostej równoległej do $\mathbf{F}$; mamy więc prawo powiedzieć, że moment sił obliczamy względem takiej prostej. Ponadto obowiązuje

Twierdzenie (słuszne, gdy $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$)
Następujące warunki są równoważne:

1. Istnieje taki wybór prostej, względem której obliczamy całkowity moment sił, że ten ostatni znika.
2. Całkowity moment sił, obliczony względem dowolnego punktu, jest prostopadły do całkowitej siły.

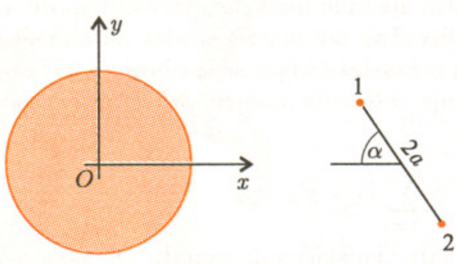
Dowód: Przy ustalonych $\mathbf{M}_O$ i $\mathbf{F}$ równanie

$$\mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

da się rozwiązać względem $\mathbf{r}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{M}_O \perp \mathbf{F}$. ■

Wystąpienie sytuacji opisanej w Twierdzeniu zdarza się rzadko. Może ona zaistnieć, gdy wszystkie siły $\mathbf{F}_k$ mają jednakowy kierunek – a więc w szczególności gdy mamy do czynienia z jednorodnym polem grawitacyjnym lub elektrycznym. Ale w przypadku jednorodnego pola elektrycznego sytuacja ta nie wystąpi, gdy całkowity ładunek układu cząstek wynosi zero. Tylko w przypadku jednorodnego pola grawitacyjnego – ze względu na dodatniość masy – sytuacja taka wystąpi zawsze. Można więc mówić o *prostej, wzdłuż której na układ cząstek działa siła grawitacji*. Wraz ze zmianą położenia cząstek prosta ta będzie się zmieniać względem zewnętrznego układu odniesienia, zachowując przy tym swój kierunek. Jeśli możemy związać z układem cząstek układ odniesienia, w którym cząstki te spoczywają (a więc gdy cząstki te tworzą ciało sztywne), to względem tego układu odniesienia powyższa prosta będzie się wprawdzie zmieniać, ale wszystkie tak otrzymane proste przetną się w jednym punkcie ciała sztywnego. O punkcie tym obrazowo mówi się, że jest *punktem przyłożenia siły ciężkości*, albo krócej, iż jest *środkiem ciężkości*. Zauważmy jeszcze, że pojęcie środka ciężkości można wprowadzić nie tylko dla ciała sztywnego *sensu stricto*, lecz także dla rotatora, tj. dla układu co najmniej dwóch cząstek, których wzajemne odległości pozostają niezmienne i które leżą na jednej prostej. Środek ciężkości rotatora też znajdzie się na tej prostej.

Odradzałbym nauczycielom obszerne omawianie pojęcia środka ciężkości na lekcjach fizyki, gdyż brak na to czasu. Odradzałbym też krótkie wytłumaczenie, że jest to punkt przyłożenia siły ciężkości, gdyż to skądinąd poprawne określenie sugeruje, iż istnieje jakiś punkt przyłożenia dowolnego układu sił. Użycie określenia „środek ciężkości” bez jakiegokolwiek wytłumaczenia też jest ryzykowne, gdyż pozwala domniemywać, że określenie to stosuje się do dowolnego, a nie tylko jednorodnego, pola grawitacyjnego. A to nie jest prawdą.



Dwupunktowy rotator w ziemskim polu grawitacyjnym.

Rozważmy bowiem rotator, składający się z dwóch cząstek o jednakowych masach m, oddalonych o $2a$. Umieśćmy ten rotator w ziemskim polu grawitacyjnym (które w rozsądnym przybliżeniu uznamy za sferycznie symetryczne), tak że jego środek geometryczny znajduje się w odległości r od środka Ziemi O, a jego oś nachylona jest pod kątem α do prostej łączącej oba środki geometryczne (patrz rysunek). Ponieważ w polu sferycznie symetrycznym mamy $\mathbf{F}_k \parallel \mathbf{r}_k$, więc całkowity moment sił działających na rotator, obliczany względem środka Ziemi, znika: $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$.

Rozwiązanie zadania M 884.
Umieśćmy w wierzchołkach A, B, C odpowiednio masy $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. Środek masy punktów A i B będzie wtedy w tym punkcie D odcinka AB, który spełnia warunek

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

czyli w punkcie leżącym na dwusiecznej kąta ACB. Wykorzystaliśmy tu twierdzenie, które mówi, że dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok trójkąta w takim stosunku, jaki jest stosunek przylegających do niego boków. Środek masy wszystkich punktów leży na odcinku DC, czyli też na dwusiecznej. W podobny sposób stwierdzamy, że leży on na pozostałych dwusiecznych.

Mimo że nie mamy tu do czynienia z polem jednorodnym, istnieje jednak prosta, wzdłuż której działa na rotator siła grawitacyjna: jest ona skierowana równolegle do całkowitej siły działającej na rotator i przechodzi przez środek Ziemi. Chcąc obliczyć całkowitą siłę działającą na rotator, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, obliczmy najpierw siły $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$, działające na jego cząstki. Jeśli przez r_0 oznaczymy promień Ziemi, przez g zaś przyspieszenie grawitacyjne na jej powierzchni i założymy, że rotator nie wnika w Ziemię, to

$$\mathbf{F}_1 = -mgr_0^2 \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} = -mgr_0^2 \frac{(r - a\cos\alpha, a\sin\alpha)}{(r^2 - 2ar\cos\alpha + a^2)^{3/2}}$$

i analogicznie

$$\mathbf{F}_2 = -mgr_0^2 \frac{(r + a\cos\alpha, -a\sin\alpha)}{(r^2 + 2ar\cos\alpha + a^2)^{3/2}}.$$

Łatwo zauważyć, że gdy $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq \pi/2$, to wtedy składowa y siły $\mathbf{F}$ jest różna od zera. A to znaczy, że prosta, wzdłuż której na rotator działa siła grawitacyjna, nie przechodzi na ogół przez jego geometryczny środek. Rotator w ziemskim polu grawitacyjnym nie ma środka ciężkości. Nie ma też środka ciężkości ocean ziemski w polu grawitacyjnym Ziemi i Księżyca. Czy gdyby go miał, możliwe byłyby pływy?

Czy istnieją pole grawitacyjne i ciało sztywne, które umieszczone w tym polu ma środek ciężkości, lecz środek ten nie pokrywa się ze środkiem masy? Na to pytanie nie umiem znaleźć zadowalającej odpowiedzi, skłonny jestem jednak sądzić, że jest ona pozytywna.

Matematyk, pisząc lub mówiąc o środku ciężkości, nie tłumaczy, czym on jest. On go definiuje, a następnie używa. Może to dobrze, że prowokuje ucznia do zadania pytania: – A jaki jest związek tego środka z ciężarem? Źle będzie dopiero wtedy, gdy to pytanie padnie, a matematyk nie będzie umiał na nie odpowiedzieć, nawet odwołując się do lekcyj fizyki. Dlatego radzę, by w szkole słowu „środek” – jeśli zostanie użyte – zamiast „ciężkości” towarzyszyło zawsze słowo „masy”.

Przykłady:

1. *Umieśćmy dwupunktowy rotator, opisany w niniejszym artykule, w cylindrycznie symetrycznym polu grawitacyjnym. (Abstrahujemy od jego niefizyczności.) Czy zawsze będzie dla niego istnieć prosta, wzdłuż której działa siła grawitacji?*

Nie. Umieśćmy cząstki rotatora w równej odległości od osi cylindra i po przeciwległych jego stronach, choć niekoniecznie na równej „wysokości”. W takiej sytuacji całkowita siła, działająca na rotator, wynosi zero. (W analogicznej sytuacji w polu sferycznie symetrycznym, ponieważ całkowity moment sił znika, ciągle możemy mówić o tym, że siła grawitacji działa wzdłuż prostej – choć nie umiemy przypisać jej zwrotu.) Jeśli cząstki rotatora są istotnie na różnej „wysokości”, to całkowity moment sił nie będzie znikał. Proponuję opisać wzorami całkowitą siłę i całkowity moment sił przy dowolnym położeniu rotatora.

2. *Jeśli do uproszczonej, sferycznie symetrycznej, ziemskiej siły grawitacyjnej dodać siłę odśrodkową – wywołaną obrotem Ziemi wokół jej osi – to otrzyma się efektywną siłę grawitacyjną, lepiej (choć niedoskonale) opisującą ziemskie pole grawitacyjne. Czy w takim modelowym polu będzie zawsze istnieć prosta, wzdłuż której na dwupunktowy rotator działa siła grawitacji?*

Nie, bo sytuacja ta jest mieszaniną sytuacji opisanej w artykule i w przykładzie 1. Opisanie jej wzorami pomoże przekonać niedowiarków.

Rozwiązanie zadania M 885.
Ponieważ $AMBM_{AB}$ jest równoległobokiem, więc $(M_{AB}, 1)$ jest środkiem masy punktów materialnych $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(M, -1)$. Zatem dowolny punkt P prostej $M_{AB}C$ można opisać przez

$$P = \frac{1 \cdot M_{AB} + x \cdot C}{1 + x},$$

czyli

$$(1 + x) \cdot P = 1 \cdot M_{AB} + x \cdot C = 1 \cdot A + 1 \cdot B + x \cdot C + (-1) \cdot M.$$

W ten sam sposób dla punktów prostych $M_{BC}A$ i $M_{CA}B$ uzyskujemy równości

$$(1 + y)P = 1B + 1C + yA - 1M, \qquad (1 + z)P = 1C + 1A + zB - 1M.$$

Pozwala to na stwierdzenie, że punkt określony przez warunek

$$P = \frac{1}{2} \cdot (A + B + C - M)$$

leży na każdej z rozważanych prostych.