Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 1999

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Zadania z matematyki nr 383, 384

Redaguje Marcin E. KUCZMA

383. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątem ostrym przy wierzchołku A. Okrąg o średnicy AC przecina proste CB i CD odpowiednio w punktach E i F (różnych od C). Prosta styczna do okręgu w punkcie A przecina prostą BD w punkcie P. Dowieść, że punkty E, F i P są współliniowe.

384. Udowodnić, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, a n jest liczbą naturalną niepodzielną przez p, to liczba $p^{n!}-1$ dzieli się przez n.

Zadanie **384** zaproponował pan Piotr Żmijewski z Łodzi.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 367 (WT=2,71) i 368 (WT=1,30) z numeru 10/1998

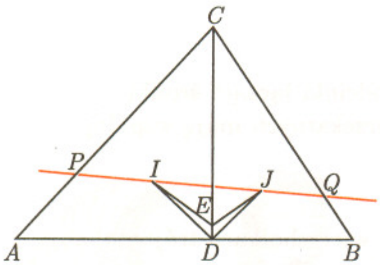
Witold Bednorz	– Tychy	43,87
Witold Bednarek	– Łódź	43,00
Zbigniew Skalik	– Pyskowice	42,45
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	42,19
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	37,24

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1999

Przypominamy treść zadań:

375. W trójkącie ABC, mającym kąty ostre przy wierzchołkach A i B, odcinek CD jest wysokością. Prosta przechodząca przez środki okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD przecina proste CA i CB odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że jeśli $|CP| = |CQ|$, to trójkąt ABC jest równoramienny lub prostokątny.

376. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Rozważamy wszystkie pary (k,m) liczb naturalnych spełniające warunki: $1 \leq k < m \leq n$, $k+m > n$, $\mathrm{NWD}(k,m)=1$. Obliczyć sumę $\sum \frac{1}{km}$, której składniki odpowiadają wszystkim rozważanym parom (k,m).



375. Oznaczmy środki okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD odpowiednio przez I i J. Na półprostej $CD^{\rightarrow}$ odkładamy odcinek CE o długości $|CE| = |CP| = |CQ|$; tworzą się trójkąty równoramienne CPQ, CPE i CEQ. Proste CI i CJ są osiami symetrii tych dwóch ostatnich trójkątów; zatem

$$|\angle CEI| = |\angle CPI| = |\angle CQJ| = |\angle CEJ|.$$

Oczywiście $|\angle CDI| = |\angle CDJ| = 45°$. Jeśli punkt E pokrywa się z D, to $|\angle CPI| = |\angle CQJ| = 45°$, i wobec tego $|\angle QCP| = 90°$; trójkąt ABC jest w tym przypadku prostokątny. Jeśli zaś punkty D i E są różne, to trójkąty DEI i DEJ są przystające (ich kąty przyległe do wspólnego boku DE są odpowiednio równe); zatem $|EI| = |EJ|$, punkty I i J leżą symetrycznie względem prostej CD, i w konsekwencji trójkąt ABC jest równoramienny.

376. Oznaczmy rozważaną sumę przez S_n. Ustalmy $n \geq 3$. Obliczymy różnicę $S_n - S_{n-1}$. Składniki, które występują w określeniu sumy S_n, ale nie w S_{n-1}, mają postać:

$$(1) \qquad \frac{1}{\ell n}, \quad \text{gdzie } 1 \leq \ell < n, \quad \mathrm{NWD}(\ell, n) = 1.$$

Składniki, które występują w sumie S_{n-1}, ale nie w S_n, mają postać:

$$(2) \qquad \frac{1}{km}, \quad \text{gdzie } 1 \leq k < m \leq n, \quad \mathrm{NWD}(k,m) = 1, \quad k+m = n.$$

Jeśli liczba ℓ spełnia warunki podane w (1), to liczba $n-\ell$ też je spełnia (a przy tym jest różna od ℓ). Zatem składniki typu (1) można pogrupować w pary odpowiadające wartościom $\ell = k$ i $\ell = m$, gdzie $k+m=n$. Każda taka para odpowiada dokładnie jednemu składnikowi typu (2). Stąd wynika, że różnica $S_n - S_{n-1}$ jest sumą wyrażeń postaci

$$\frac{1}{kn} + \frac{1}{mn} - \frac{1}{km}, \quad \text{gdzie } k+m=n$$

– a każde z nich ma wartość zero. To znaczy, że ciąg (S_n) jest stały. Dla $n=2$ jedynym składnikiem sumy S_2 jest ułamek $\frac{1}{1\cdot 2}$. Tak więc $S_n = \frac{1}{2}$ dla wszystkich n.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 268 (WT=2,33) i 269 (WT=2,53) z numeru 12/1998

Jarosław Łazuka	– Warszawa	47,18
Marek Wójcicki	– Szczecin	44,23
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	29,07
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	26,01
Aleksander Surma	– Myszków	20,06
Artur Arciszewski	– Kielce	13,34

Po raz drugi zalicza 44 punkty p. Łazuka, a po raz pierwszy – p. Wójcicki, który dzięki temu zostaje 25. członkiem **Klubu 44 F**.

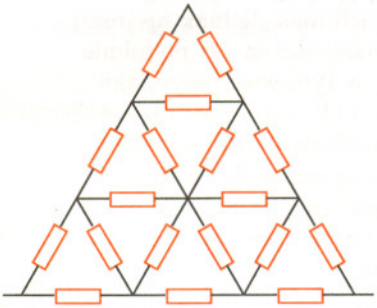
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 1999

Zadania z fizyki nr 280, 281

Redaguje Jerzy B. BROJAN

280. Pocisk artyleryjski przelatuje nad linią frontu i w tym momencie (zapewne wskutek awarii zapalnika) następuje wybuch. Jaka część odłamków spadnie po stronie A, z której nadleciał pocisk? Dana jest prędkość pocisku v_1 (skierowana poziomo i prostopadle do linii frontu) oraz prędkość odłamków v_2 względem układu związanego z pociskiem. Zakładamy, że w tym układzie wartość prędkości odłamków jest jednakowa, a wszystkie kierunki są równo prawdopodobne.

281. Osiemnaście jednakowych oporników (np. po 1 Ω) połączono w obwód przedstawiony na rysunku 1. Obliczyć opór zastępczy między dwoma wierzchołkami trójkąta (nie korzystając ze specjalistycznych programów komputerowych).

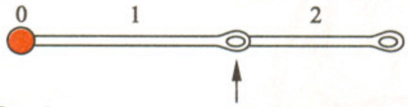


Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1999

Przypominamy treść zadań:

272. Dwa jednorodne pręty leżą na gładkim stole, przy czym jeden koniec pręta 1 jest umocowany w punkcie O, wokół którego może się obracać bez tarcia, a drugi jego koniec jest połączony przegubowo z końcem pręta 2. W chwili początkowej pręty były nieruchome, a jeden był przedłużeniem drugiego. Uderzono w połączone końce prętów, wprawiając oba w ruch (rys. 2); czas działania siły był bardzo krótki. Jaki związek muszą spełniać masy i długości prętów, aby się zderzyły (po wykonaniu obrotu względem siebie o 180°)?



Rys. 2

273. Tempo przepływu ciepła przez ścianę (moc cieplna na jednostkę powierzchni) jest proporcjonalne do różnicy temperatur między wewnętrzną a zewnętrzną powierzchnią ściany, a stała proporcjonalności k charakteryzuje skuteczność izolacji cieplnej. Jeśli wartość tego współczynnika dla „gołej" ściany wynosi $k_1 = 0{,}8\ \mathrm{W/(m^2{\cdot}K)}$, a dla dodatkowej warstwy styropianu – $k_2 = 0{,}7\ \mathrm{W/(m^2{\cdot}K)}$, to ile jest równy współczynnik k dla ściany obłożonej dwiema takimi warstwami, od wewnątrz i od zewnątrz?

272. Wprowadźmy oznaczenia: m_1, m_2 – masy prętów, l_1, l_2 – ich długości, ω_1, ω_2 – prędkości kątowe (względem układu inercjalnego), ω_1', ω_2' – początkowe wartości ω_1 i ω_2, α – kąt między przedłużeniem pręta 1 a prętem 2. Rozważmy najpierw sytuację początkową (natychmiast po uderzeniu). Jeśli popęd siły działającej w chwili uderzenia na pręt 2 był równy τ, to pod jej wpływem środek masy pręta uzyskał prędkość $v = \tau/m_2$, natomiast rozpatrując ruch obrotowy względem środka masy, należy uwzględnić moment bezwładności, równy $I_2 = (1/12)m_2l_2^2$. Obliczamy $\omega_2' = -\tau(l_2/2)/I_2 = -6\tau/(m_2l_2) = -6v/l_2$, a podstawiając $v = l_1\omega_1' + l_2\omega_2'/2$, znajdujemy związek między parametrami ω_1' i ω_2':

$$(\star)\qquad l_2\omega_2' = -(3/2)l_1\omega_1'.$$

O dalszym ruchu prętów decydują dwie zasady zachowania – momentu pędu K względem punktu O oraz energii kinetycznej E. Każda z tych wielkości jest sumą trzech składników, związanych z: a) ruchem pręta 1, b) ruchem środka masy pręta 2, c) ruchem obrotowym pręta 2 wokół środka masy. Odpowiednie wyrażenia mają postać

$$\begin{aligned}
K_a &= (1/3)m_1l_1^2\omega_1,\\
K_b &= m_2\left(l_1^2\omega_1 + (1/4)l_2^2\omega_2 + (1/2)l_1l_2(\omega_1+\omega_2)\cos\alpha\right),\\
K_c &= (1/12)m_2l_2^2\omega_2,\\
2E_a &= (1/3)m_1l_1^2\omega_1^2,\\
2E_b &= m_2\left(l_1^2\omega_1^2 + (1/4)l_2^2\omega_2^2 + l_1l_2\omega_1\omega_2\cos\alpha\right),\\
2E_c &= (1/12)m_2l_2^2\omega_2^2.
\end{aligned}$$

Wartości stałych K oraz E obliczamy dla chwili początkowej, podstawiając $\alpha = 0$ oraz wzór $(\star)$; otrzymujemy

$$K = K_a + K_b + K_c = \omega_1'l_1^2\left((1/3)m_1 + (1/4)m_2\right),$$

$$2E = 2E_a + 2E_b + 2E_c = \omega_1'^2l_1^2\left((1/3)m_1 + (1/4)m_2\right).$$

Aby rozstrzygnąć, czy pręty się zderzą, należy zbadać ekstrema funkcji $\alpha(t)$, w których $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Zasada zachowania momentu pędu sprowadza się wtedy do równania

$$K = \omega\left((1/3)m_1l_1^2 + m_2\left(l_1^2 + (1/3)l_2^2 + l_1l_2\cos\alpha\right)\right) = \omega_1'l_1^2\left((1/3)m_1 + (1/4)m_2\right),$$

a zasada zachowania energii – do równania

$$2E = \omega^2\left((1/3)m_1l_1^2 + m_2\left(l_1^2 + (1/3)l_2^2 + l_1l_2\cos\alpha\right)\right) = \omega_1'^2l_1^2\left((1/3)m_1 + (1/4)m_2\right).$$

Eliminując ω stwierdzamy, że masy również się skracają i otrzymujemy

$$l_1l_2\cos\alpha = -(3/4)l_1^2 - (1/3)l_2^2,$$

czyli

$$(3l_1 - 2l_2)^2 + 12l_1l_2(1+\cos\alpha) = 0.$$

Dla $\cos\alpha > -1$ równanie to nie może być spełnione, czyli funkcja $\alpha(t)$ nie ma ekstremów. Dla $\cos\alpha = -1$ istnieje jednak rozwiązanie $l_2 = (3/2)l_1$. Oznacza to, że przy takim stosunku l_2/l_1 podczas zbliżania α do 180° następuje spowolnienie względnego obrotu prętów aż do spoczynku. Oczywiście, wtedy nie nastąpi zderzenie prętów, a jedynie ich łagodne zetknięcie. Zamiana prętów wyeliminuje zderzenie, gdy początkowo l_2 było równe (ew. bliskie) $(2/3)l_1$.

273. Omawiany współczynnik k odnosi się, oczywiście, do stanu stacjonarnego, polegającego na tym, że temperatura w każdym punkcie ściany nie zmienia się w miarę upływu czasu (zmiany temperatury występują tylko np. bezpośrednio po włączeniu lub wyłączeniu ogrzewania). Z zasady zachowania energii wynika, że w stanie stacjonarnym tyle samo ciepła przepływa przez każdą warstwę, tzn.

$$k_2(T_2 - T_1) = k_1(T_3 - T_2) = k_3(T_4 - T_3) = P/S,$$

gdzie T_1 jest temperaturą po jednej stronie, T_4 po drugiej, T_2 i T_3 to temperatury styku warstw, a P/S oznacza ciepło przepływające na jednostkę czasu i jednostkę powierzchni. Współczynnik k dla całej ściany znajdziemy z równania

$$k(T_4 - T_1) = P/S.$$

Stąd $1/k = 1/k_1 + 1/k_2 + 1/k_3$, przy czym w naszym przypadku $k_3 = k_2$. Obliczamy $k = 0{,}243\ \mathrm{W/(m^2{\cdot}K)}$.