Jak to robi matematyk?

Nawiązując do artykułu Wojciecha Kopczyńskiego przedstawiam tu matematyczną teorię środka masy i to, dlaczego matematycy czymś takim się zajmują. Będzie to przy tym bardzo szczególny fragment zastosowania w matematyce metod „masowych" – rozpatrywane będą tylko skończone układy punktów materialnych.

Punkt materialny to dla matematyka para złożona z punktu i liczby. Liczba ta jest nazywana masą, choć może być zarówno dodatnia, jak i ujemna (czemu tak – dalej). W interesującym nas kawałku teorii rozważa się *układy punktów materialnych*, czyli ich skończone zbiory. Podstawowe pojęcie to *moment statyczny* układu (niech to będzie $\{(A_1, m_1), \ldots, (A_n, m_n)\}$) względem punktu (nazwijmy go P). Określa się go tak: dla jednego punktu (A, m) jest to $\overrightarrow{AP} \cdot m$ (czyli jak w dźwigniach – ramię razy siła), a dla wielu – suma momentów poszczególnych punktów układu, czyli $\overrightarrow{A_1P} \cdot m_1 + \ldots + \overrightarrow{A_nP} \cdot m_n$. *Środek masy* układu to punkt, względem którego układ ma moment równy zeru.

Oto dwa spostrzeżenia. **Po pierwsze** – jeśli S jest środkiem masy rozpatrywanego układu, a O jest dowolnym punktem, to

$$0 = \overrightarrow{A_1S} \cdot m_1 + \ldots + \overrightarrow{A_nS} \cdot m_n = (\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA_1}) \cdot m_1 + \ldots + (\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA_n}) \cdot m_n,$$

czyli

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA_1} \cdot m_1 + \ldots + \overrightarrow{OA_n} \cdot m_n}{m_1 + \ldots + m_n}.$$

Gdy mówimy o środku masy układu punktów bez podawania ich mas, należy to rozumieć tak, że w każdym z tych punktów umieszczona jest ta sama masa.

A więc, **po drugie** – to jest spostrzeżenie Kartezjusza – środek masy układu punktów materialnych to **w dowolnym układzie współrzędnych (!)** kartezjańskich ich średnia ważona, czyli

$$S = \frac{A_1 \cdot m_1 + \ldots + A_n \cdot m_n}{m_1 + \ldots + m_n}.$$

Technika poszukiwania środka masy stwarza ciekawą możliwość zrobienia z jednego punktu geometrycznego różnych punktów materialnych (patrz przykład **3**).

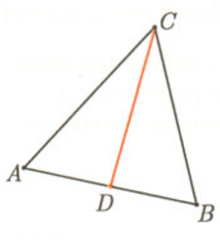
Wynika stąd w szczególności, że środek masy dowolnego układu punktów materialnych leży w najmniejszej podprzestrzeni zawierającej te punkty (a więc np. na prostej, na płaszczyźnie).

Aby sprawnie poszukiwać środka masy, przydatne jest pojęcie *układów równoważnych*, czyli takich, które względem każdego punktu mają ten sam moment statyczny. Wyżej poczynione spostrzeżenia pozwalają stwierdzić, że z każdym układem równoważny jest układ jednopunktowy: środek masy pierwotnego układu z sumą jego mas. Zatem na to, by dwa układy były równoważne, potrzeba i wystarcza, by miały ten sam środek masy i tę samą sumę mas.

Przykłady:

1. *Środek masy wierzchołków trójkąta to punkt przecięcia jego środkowych.*

Mamy układ $U = \{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$. Zastępujemy $\{(A, 1), (B, 1)\}$ przez równoważny mu układ $\{(D, 2)\}$,



gdzie $D = \dfrac{1 \cdot A + 1 \cdot B}{2} = \dfrac{A + B}{2}$. Zatem D jest środkiem odcinka AB. Układ U jest równoważny układowi $\{(D, 2), (C, 1)\}$, co już wystarcza do dowodu **1**, bo środek S masy tego układu leży na CD, czyli na środkowej – analogicznie stwierdzamy, że leży na pozostałych środkowych. Faktycznie uzyskaliśmy znacznie więcej: wiemy, że $\overrightarrow{DS} : \overrightarrow{CS} = -1 : 2$, a więc środkowe dzielą się w stosunku $1 : 2$.

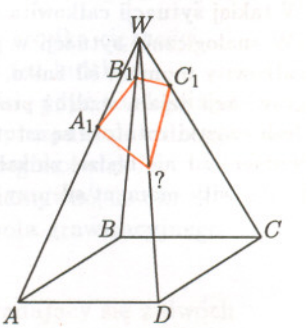
2. *Środek masy punktów materialnych $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$ jest w takim punkcie D, że $ABCD$ jest równoległobokiem.*

Wystarczy wykazać, że środek odcinka AC jest środkiem odcinka BD. Ale z definicji środka masy

$$D = \frac{1 \cdot A + (-1) \cdot B + 1 \cdot C}{1 + (-1) + 1} = A - B + C,$$

skąd $A + C = B + D$, a więc $\dfrac{A + C}{2} = \dfrac{B + D}{2}$.

3. *Płaszczyzna przecina krawędzie boczne AW, BW, CW ostrosłupa $ABCDW$ o podstawie równoległobocznej odpowiednio w $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ ich długości, licząc od wierzchołka. Znaleźć stosunek, w jakim ta płaszczyzna dzieli krawędź DW.*

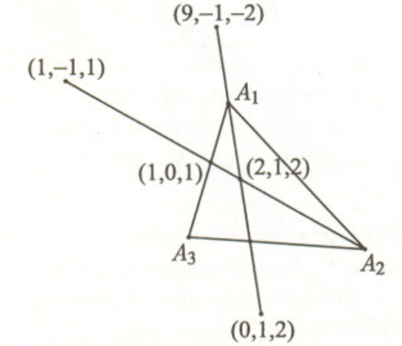


Umieśćmy w punktach A, B, C odpowiednio masy $1, -1, 1$. Z punktu W robimy trzy punkty materialne, obdarowując go kolejno takimi masami, aby (patrz rysunek) środek masy $(A, 1), (W, m_A)$ wypadał w A_1, środek $(B, 1), (W, m_B)$ w B_1 i środek $(C, 1), (W, m_C)$ wypadał w C_1. Jak nietrudno obliczyć, $m_A = 2$, $m_B = -4$, $m_C = 3$.

Obliczamy środek S masy układu wszystkich (sześciu) punktów, różnie grupując wyrazy:

$$S = \frac{(1A + 2W) + (-1B - 4W) + (1C + 3W)}{1 + 2 - 1 - 4 + 1 + 3} = \frac{3A_1 - 5B_1 + 4C_1}{2} = \frac{(1A - 1B + 1C) + (2W - 5W + 4W)}{2} = \frac{D + W}{2}.$$

Drugi wiersz mówi, że S leży na płaszczyźnie $A_1B_1C_1$, a trzeci, że jest środkiem DW.



Przykłady współrzędnych barycentrycznych punktów.

Użycie ujemnych mas matematycznie spowodowane jest spostrzeżeniem, że dla mas dodatnich środek masy zawsze leży wewnątrz uwypuklenia zbioru punktów (czyli najmniejszego zbioru wypukłego, który je zawiera). Gdy zatem chcemy, by środek masy mógł znaleźć się w dowolnie wskazanym miejscu, musimy dopuścić również i masy ujemne. Z fizycznego punktu widzenia można powiedzieć, że oprócz dźwigni dwustronnych dopuszczać będziemy również dźwignie jednostronne. A poza tym uzasadnia to odrzucany przez fizyków termin *środek ciężkości* – realny ciężar, jako suma grawitacji i wyporu, może być zarówno dodatni, jak i ujemny (np. balony).

Technikę środków ciężkości wprowadził do matematyki Archimedes, później miała ona od czasu do czasu rozmaitych zwolenników, ale w pełni konsekwentnie uczynił z niej narzędzie matematyki (ciągle mówimy tylko o skończonych układach punktów) Ferdinand Möbius (*Der baryzentrische Calcül*, 1827). Współrzędne barycentryczne, jakie wprowadził, stały się nieodłącznym narzędziem najsilniejszej z dyscyplin algebraicznych, którą jest dziś geometria algebraiczna.

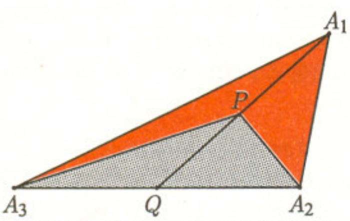
Funkcja jednorodna stopnia k to taka funkcja n-argumentowa f, która dla dowolnych argumentów spełnia warunek $f(\lambda\cdot x_1,\ldots,\lambda\cdot x_n)=\lambda^k\cdot f(x_1,\ldots,x_n)$. Równanie $f=0$ jest dla takiej funkcji nazywane równaniem jednorodnym. Dla wielomianów jednorodność oznacza, że wszystkie wyrazy są tego samego stopnia.

Jeżeli mamy na płaszczyźnie trzy niewspółliniowe punkty (w dowolnej przestrzeni – wierzchołki maksymalnego sympleksu), to możemy każdemu punktowi przyporządkować trójkę liczb – mas, jakie należy umieścić w kolejnych wierzchołkach trójkąta, aby środek masy wypadł właśnie w tym punkcie. Ta trójka to *współrzędne barycentryczne* tego punktu. Oczywiście, każdy punkt ma wiele różnych układów współrzędnych barycentrycznych w danym układzie odniesienia (czyli dla danej trójki punktów) – są to wszystkie trójki proporcjonalne, z wyjątkiem trójki samych zer.

Jest to największa zaleta współrzędnych barycentrycznych – wszystkie zależności geometryczne opisywane są przez równania jednorodne, co ogromnie upraszcza rachunki.

Współrzędne arealne nie są określone wtedy, gdy współrzędne barycentryczne sumują się do zera. Należy wtedy przenieść się do geometrii rzutowej, o czym tu nie będziemy mówić. Wszystkie punkty zwyczajnej przestrzeni czy płaszczyzny mają współrzędne barycentryczne o sumie różnej od zera.

Odniesienie do klasycznej geometrii może być takie. Jeśli zdecydujemy się posługiwać polem zorientowanym (tj. brać pole trójkąta z plusem, gdy jego wierzchołki są uporządkowane zgodnie z orientacją układu odniesienia (A_1, A_2, A_3), a z minusem w przypadku przeciwnym) i za jednostkę pola brać $S_{\Delta A_1A_2A_3}$ (pole zorientowane trójkąta $A_1A_2A_3$), to *współrzędne arealne* punktu P, czyli współrzędne barycentryczne unormowane do sumy równej 1, a więc $\left(\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}, \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}, \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}\right)$ są równe $(S_{\Delta A_3PA_2}, S_{\Delta A_1PA_3}, S_{\Delta A_2PA_1})$.



Oto początek dowodu podanego wyżej związku współrzędnych arealnych z polem w przypadku współrzędnych dodatnich:

$$\frac{m_2}{m_3}=\frac{|A_3Q|}{|QA_2|}=\frac{S_{\Delta A_3A_1Q}}{S_{\Delta QA_1A_2}}=$$
$$=\frac{S_{\Delta A_3PQ}}{S_{\Delta QPA_2}}=\frac{S_{\Delta A_3A_1Q}-S_{\Delta A_3PQ}}{S_{\Delta QA_1A_2}-S_{\Delta QPA_2}}=$$
$$=\frac{S_{\Delta A_1PA_3}}{S_{\Delta A_2PA_1}}.$$

Dokończenie tego dowodu, jak też uzasadnienie wszystkich dalej przytoczonych faktów, to nietrudne zadania – polecam je z całego serca.

Jeśli rozpatrzymy układ współrzędnych kartezjańskich, w którym jest $A_1=(1,0)$, $A_2=(0,1)$, $A_3=(0,0)$, to punkt o współrzędnych arealnych (p_1, p_2, p_3) będzie w nim miał współrzędne (p_1, p_2).

Najważniejszy wzór barycentrycznej geometrii opisuje (w przypadku płaszczyzny) pole trójkąta, którego współrzędne arealne są $A=(k_1, k_2, k_3)$, $B=(l_1, l_2, l_3)$ i $C=(m_1, m_2, m_3)$:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3\\ l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{vmatrix}\right|\cdot S_{\Delta A_1A_2A_3}.$$

Stąd, uznając współrzędne dwóch punktów za dane, a trzeciego za niewiadome, uzyskujemy (jednorodne, stopnia 1, bez wyrazów wolnych) równanie prostej we współrzędnych barycentrycznych – pole jest równe zeru.

Najefektowniejsze – moim zdaniem – elementarne twierdzenie (też w przypadku płaszczyzny), które łatwo można uzyskać tą drogą, to twierdzenie Routha:

jeśli pole trójkąta ABC jest równe $\mathbf{T}$ *oraz* (patrz rysunek obok),

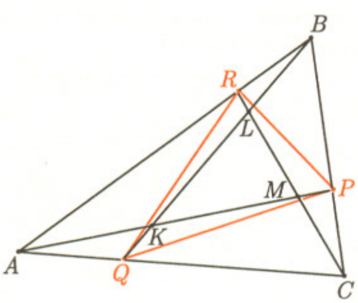
$$\overrightarrow{BP}=\lambda\cdot\overrightarrow{PC},\quad \overrightarrow{CQ}=\mu\overrightarrow{QA},\quad \overrightarrow{AR}=\nu\overrightarrow{RB}$$

to pole trójkąta KLM jest równe

$$\left|\frac{(\lambda\mu\nu-1)^2}{(\lambda\mu+\lambda+1)(\mu\nu+\mu+1)(\nu\lambda+\nu+1)}\right|\cdot\mathbf{T},$$

pole zaś trójkąta PQR jest równe

$$\left|\frac{\lambda\mu\nu+1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}\right|\cdot\mathbf{T}.$$



Uwaga. Punkty P, Q, R mogą być obierane dowolnie na całych prostych BC, AC, AB, nie tylko na bokach trójkąta.

Marek KORDOS