Ile waży kilogram?

Ewa CZUCHRY

Kilogram. Bez wahania odpowiemy, kładąc parę jabłek na prostej wadze szalkowej i porównując siłę, z jaką Ziemia przyciąga jabłka, czyli ich ciężar, z siłą działającą na odważnik. Dlaczego jednak „kilogram” – skoro mierzymy wielkość siły, czemu nie posługujemy się jej jednostką i nie sprzedajemy (lub kupujemy) owoców „na niutony”?

Chociażby po to, aby ustrzec się przed nieuniknionymi stratami albo procesami o nieuczciwość. Ciężar ciała nie jest bowiem wielkością charakterystyczną dla danego ciała, ale zmienia się on wraz z szerokością geograficzną albo wysokością nad poziomem morza. Nasze europejskie „dziesięć niutonów” ważyłoby wprawdzie więcej na biegunie, ale mniej na równiku i jeszcze mniej na szczytach Himalajów. Dużo wygodniej jest nam operować *masą grawitacyjną*, wielkością z definicji niezależną od natężenia pola grawitacyjnego. Wybierając jakiś przedmiot jako wzorzec, możemy określać *masę grawitacyjną* przez stosunek ciężaru danego ciała do ciężaru *masy wzorcowej*. Otrzymana w ten sposób wielkość jest proporcjonalna do ciężaru ciała, ale nie zależy od miejsca na Ziemi, w którym je ważymy. Możemy więc swobodnie podróżować ze swoim zestawem odważników po całym świecie, nie obawiając się potencjalnych nierzetelnych sprzedawców z okolic podbiegunowych.

Niestety, *masa grawitacyjna* nie opisuje nam jeszcze ilości materii, łatwo wyobrażanej jako ilość atomów wchodzących w skład danego ciała. Można o niej myśleć raczej jak o „ładunku grawitacyjnym”, analogicznym do ładunku elektrycznego. Taki „ładunek” opisuje nam nie tylko, z jaką siłą dane ciało jest przyciągane grawitacyjnie przez Ziemię, ale także, z jaką siłą działa ono na Ziemię. W elektryczności ładunek elektryczny i *masa bezwładna*, czyli wielkość opisująca opór (bezwładność) stawiany przez ciało przy próbach zmiany prędkości jego ruchu, mogą być zupełnie różne. Dlaczego więc miałoby być inaczej dla ładunku grawitacyjnego?

Siła grawitacji jest jednak siłą szczególną. Od siły elektrostatycznej różni ją to, że jest ona powszechna i nieunikniona, nie można od niej uciec ani skonstruować ekranów od niej izolujących (analogicznych do klatki Faradaya). Istnieją ciała neutralne elektrycznie, nie istnieją zaś (niestety!) mogące oprzeć się działaniu grawitacji.

Skorzystamy z tej własności materii. Weźmy trochę dowolnej substancji, zważmy i podzielmy na dwie równe części. Każda z nich będzie dwa razy słabiej przyciągana grawitacyjnie i w związku z tym obdarzona dwukrotnie mniejszą *masą grawitacyjną*. Także *masy bezwładne* tych dwóch części – proporcjonalne do ilości zawartych w nich atomów – będą dwa razy mniejsze. A więc dla kawałków tej samej substancji *masy grawitacyjne* muszą być proporcjonalne do ich *mas bezwładnych*.

Ale jak porównywać pod tym względem zupełnie różne substancje? Tutaj musimy sięgnąć po fakty doświadczalne. Przeprowadzona wiele razy słynna obserwacja pokazała, że w próżni dowolne przedmioty, wykonane z zupełnie różnych materiałów – od ołowiu do pierza, spadają swobodnie w polu grawitacyjnym z przyspieszeniem g, stałym dla danego miejsca na Ziemi. Siła przyspieszająca te ciała jest siłą grawitacyjną proporcjonalną do *masy grawitacyjnej*. A więc *masa grawitacyjna* jest proporcjonalna do *masy bezwładnej*, co więcej, stosunek ich wartości jest taki sam dla wszystkich substancji (bo przedmioty z nich wykonane spadają z jednakowym przyspieszeniem). Jeśli więc wybierzemy 1 kg jako jednostkę obydwu mas, stosunek ten będzie równy jeden i otrzymamy równość *masy grawitacyjnej* i *masy bezwładnej*.

Twierdzenie to leży u podstaw ogólnej teorii względności, jednej z najważniejszych teorii XX wieku. W naszych rozważaniach, opartych na doświadczeniu, nie musieliśmy korzystać jednak z jej założeń, na szczęście więc nie jest nam potrzebna dogłębna znajomość tej teorii, gdy wybieramy się do sklepu po kilogram marchewki...

Rozwiązanie zadania F 501.
Rozważmy ciało o masie m pozostające w spoczynku względem powierzchni planety. Działające na nie siły: ciężkości, odśrodkowa i reakcji podłoża (równa co do wartości ciężarowi ciała), równoważą się. Na biegunie i na równiku siły te są skierowane wzdłuż jednej prostej i możemy napisać warunek pozostawania w spoczynku następująco:

$$F_g = Q + \frac{mv^2}{R},$$

gdzie F_g jest przyciągającą siłą ciężkości, Q ciężarem ciała równym wartości siły reakcji podłoża, $\frac{mv^2}{R}$ jest siłą odśrodkową, a v prędkością liniową wynikającą z obrotu planety.

Na biegunie mamy $v = 0$ i stąd $F_g = Q_b$, czyli ciężar ciała Q_b na biegunie jest równy wartości siły ciężkości w tym punkcie.

Na równiku $v = \frac{2\pi R}{T}$, gdzie T jest okresem obrotu. Mamy więc

$$F_g = Q_r + \frac{4\pi^2 mR}{T^2},$$

ale zgodnie z warunkiem zadania $Q_r = \frac{1}{2}Q_b = \frac{1}{2}F_g$, otrzymujemy więc równanie

$$\frac{1}{2}F_g = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}.$$

Siła ciężkości F_g, działająca na ciało znajdujące się na powierzchni planety, jest równa $F_g = \mathrm{G}\frac{mM}{R^2}$, gdzie $M = \frac{1}{3}\pi\varrho R^3$ jest masą planety o gęstości ϱ. Podstawiając tę postać siły F_g do poprzedniego równania, otrzymujemy, że okres obrotu planety jest równy

$$T = \sqrt{\frac{6\pi}{\mathrm{G}\varrho}} \approx 2\ \mathrm{h}\ 44\ \mathrm{min}.$$