6/99 (18)

Γlimatias
$n\to\infty$

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (17)

ZADANIE: Obliczyć całkę $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{y^2}^{1} x^{3/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

Rozwiązanie:

I sposób: Obliczamy całkę w podanej postaci

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{y^2}^{1} x^{3/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_{x=y^2}^{1}\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{5}y^5\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \left(\frac{2y}{5}-\frac{y^6}{15}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}-\frac{1}{15}+\frac{2}{5}+\frac{1}{15}=\frac{4}{5}.$$

II sposób: Dokonujemy zmiany kolejności całkowania. Można to zrobić, gdyż funkcja podcałkowa jest ciągła. Granice całkowania w wyjściowej całce opisują obszar

$$\{(x,y); -1\le y\le 1,\ y^2\le x\le 1\} =$$
$$= \{(x,y); 0\le x\le 1, -\sqrt{x}\le y\le \sqrt{x}\},$$

skąd po zmianie kolejności całkowania otrzymujemy całkę

$$\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x^{3/2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} x^{3/2}y\Big|_{y=-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} x^{3/2}2\sqrt{x}\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} 2x^2\mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3}\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3}.$$

JWR

GRY (3)

W poprzednim Γ-limatiasie podaliśmy sposób znajdowania wygrywającego ruchu w grze *Nim*. Przypomnijmy, że w pozycji złożonej z k stosów, zawierających odpowiednio $n_1, n_2, \ldots, n_k$ bierek, obliczamy sumę dwójkową $s = n_1 +_2 n_2 +_2 \ldots +_2 n_k$. Jeżeli $s=0$, to jesteśmy na przegranej pozycji i nie pozostaje nam nic innego, jak czekać na błąd przeciwnika. Jeśli jednak $s>0$, to wygraną mamy w kieszeni, o ile znajdziemy właściwy ruch. W tym celu obliczamy sumy $n_1 +_2 s$, $n_2 +_2 s$, $\ldots$, $n_k +_2 s$ i wybieramy takie $1\le i\le k$, aby $n_i +_2 s < n_i$. Wówczas z i-tego stosu zabieramy $n_i - (n_i +_2 s)$ bierek. Zwracamy uwagę, że w ostatnim wzorze dodawanie jest dwójkowe, a odejmowanie „zwykłe”.

A jaką mamy gwarancję, że takie i istnieje? Przyjrzyjmy się liczbie s. Niech największym składnikiem w rozkładzie liczby s na sumę różnych potęg dwójki będzie 2^j. Oznacza to, że $2^j\le s<2^{j+1}$. Jakie muszą być liczby $n_1, n_2, \ldots, n_k$, aby s była ich sumą dwójkową? Jeśli każdą z liczb $n_1, n_2, \ldots, n_k$ rozłożymy na sumę różnych potęg dwójki, to 2^j pojawi się w tych rozkładach **nieparzystą** liczbę razy, natomiast 2^l, dla $l>j$, pojawi się **parzystą** liczbę razy. Każda z liczb n_i daje się zapisać w postaci $2^{j+1}q+r$ lub $2^{j+1}q+2^j+r$, gdzie $q\ge 0$ i $0\le r<2^j$, przy czym druga postać występuje dla **nieparzyście** wielu i. Wówczas dla $n_i = 2^{j+1}q+r$ mamy

$$n_i +_2 s = 2^{j+1}q +_2 r +_2 2^j +_2 (s-2^j) =$$
$$= 2^{j+1}q + 2^j + [(s-2^j) +_2 r] \ge 2^{j+1}q+2^j > n_i,$$

a dla $n_i = 2^{j+1}q+2^j+r$ mamy

$$n_i +_2 s = 2^{j+1}q +_2 2^j +_2 r +_2 2^j +_2 (s-2^j) =$$
$$= 2^{j+1}q + [(s-2^j) +_2 r] < 2^{j+1}q+2^j \le n_i.$$

Wynika stąd, że aby wykonać wygrywający ruch, musimy wybrać stos o liczbie bierek postaci $2^{j+1}q+2^j+r$. Liczba wygrywających ruchów jest więc **nieparzysta**.

Skąd wiadomo, że podana przez nas strategia jest poprawna? Wykazaliśmy, że w każdej pozycji o dwójkowej sumie liczb bierek różnej od zera istnieje ruch prowadzący do pozycji o sumie 0, podczas gdy każdy ruch zmienia sumę dwójkową liczb bierek, musi więc od pozycji o sumie 0 prowadzić do pozycji o sumie dodatniej. Jeśli więc w dowolnym momencie gry będziemy wykonywać ruch w pozycji o sumie dodatniej, to możemy podać przeciwnikowi pozycję o sumie 0, na co przeciwnik poda nam pozycję o sumie dodatniej, co umożliwi nam podanie pozycji o sumie 0 itd. Ponieważ gra musi się zakończyć (ze względu na skończoną i stale zmniejszającą się liczbę bierek), wygra ta strona, która poda przeciwnikowi pozycję złożoną z 0 stosów, czyli ta strona, która cały czas podaje przeciwnikowi pozycje o dwójkowej sumie 0.

Powyższe rozważania można wykorzystać do nieco innej niż podana w poprzednim Γ-limatiasie procedury znajdowania wygrywającego ruchu. Omówimy ją na przykładzie. Załóżmy, że mamy wykonać ruch w pozycji złożonej z 5 stosów mających odpowiednio 17, 12, 21, 23 i 19 bierek. Zapisujemy liczność poszczególnych stosów w postaci sum różnych potęg dwójki: 16+1, 8+4, 16+4+1, 16+4+2+1, 16+2+1. Szukamy najwyższej potęgi dwójki, która w tych rozkładach występuje nieparzystą liczbę razy (16 występuje 4 razy, więc nie; następnie 8: jeden raz, w porządku), wybieramy jeden ze stosów, w którego rozkładzie wystąpiła ta potęga (nie ma co wybierać, 8 wystąpiło tylko w drugim stosie), a następnie dodajemy potęgi dwójki, które w pozostałych stosach występują nieparzyście wiele razy – w przykładzie takich nie ma, więc otrzymujemy 0. Jest to liczba bierek, którą należy pozostawić w wybranym stosie. W rozważanym przykładzie istnieje więc tylko jeden ruch wygrywający i polega on na zabraniu wszystkich bierek z drugiego stosu.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl