Twierdzenie Cevy dla wielokątów

Tomasz ŻUKOWSKI

Na podstawie artykułu G.C. Shepharda *Pratt sequences and n-gons.*

Przeglądając elementarne twierdzenia dotyczące wielokątów, z pewnością zauważycie, że większość z nich dotyczy trójkątów, dużo mniej czworokątów, bardzo nieliczne pięcio- i sześciokątów, a prawie wcale nie ma ogólnych twierdzeń o dowolnych n-kątach. Na przykład, mamy całą serię twierdzeń mówiących, że pewne szczególne proste w trójkącie (wysokości, dwusieczne kątów wewnętrznych, środkowe, ...) przecinają się w jednym punkcie. Czy możliwe są uogólnienia tych twierdzeń na dowolne n-kąty?

Dociekliwy Czytelnik zauważy, że wspomniane wyżej twierdzenia są łatwymi do udowodnienia konsekwencjami klasycznego twierdzenia Cevy (*Delta* 11/1993, *Punkty szczególne trójkąta*). Gdyby tak mieć twierdzenie Cevy dla dowolnych wielokątów...

Przypominamy:
Niech punkty P, Q, R leżą, odpowiednio, na prostych AB, BC, AC, przy czym punkty A, B, C nie leżą na jednej prostej. Wówczas:

1. Twierdzenie Cevy. Proste PC, QA i RB przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{BP}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RC}}=1.$$

2. Twierdzenie Menelaosa. Punkty P, Q, R leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{BP}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RC}}=-1.$$

Ustalmy definicje i oznaczenia:

Wielokątem $P = [V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}]$ nazywać będziemy łamaną zamkniętą (dopuszczamy przecięcia boków) o wierzchołkach $V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}$ numerowanych cyklicznie, tzn. dla dowolnej liczby całkowitej k, V_k utożsamiać będziemy z $V_{k \bmod n}$. Zakładamy, że żadne trzy kolejne wierzchołki V_{k-1}, V_k, V_{k+1} nie są współliniowe.

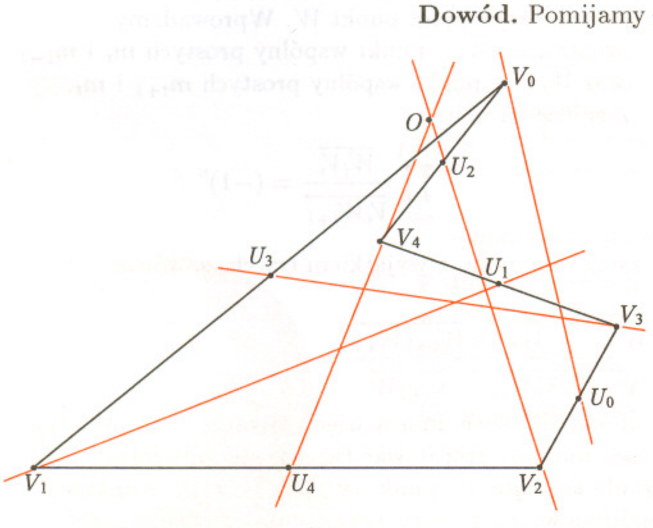
Dla równoległych wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ definiujemy liczbę rzeczywistą $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{|AB|}{|CD|}$, gdy wektory te mają zgodne zwroty i $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = -\frac{|AB|}{|CD|}$, gdy mają zwroty przeciwne. Podobnie, dla dowolnego trójkąta $[A, B, C]$ określamy pole ze znakiem $S[A, B, C]$ tak, że $S[A, B, C] = P[A, B, C]$, gdy wierzchołki A, B, C następują w kolejności zgodnej z ruchem wskazówek zegara i $S[A, B, C] = -P[A, B, C]$, gdy wierzchołki A, B, C następują w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara.

W literaturze, pod nazwą Twierdzenie Cevy dla wielokątów, można znaleźć następujące

Twierdzenie 1. Dla nieparzystej liczby naturalnej $n = 2s + 1$ i wielokąta $P = [V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}]$ oraz dowolnego punktu O, nie leżącego na żadnej z prostych zawierających boki wielokąta P, niech U_i będzie punktem wspólnym prostej V_iO i $V_{i+s}V_{i-s}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Wtedy

$$\prod_{i=0}^{n-1}\frac{\overrightarrow{V_{i-s}U_i}}{\overrightarrow{U_iV_{i+s}}}=1$$

Dowód. Pomijamy – udowodnimy twierdzenie ogólniejsze. ■



Rys. 1. Środkowe pięciokąta nie przecinają się w jednym punkcie.

Powyższe twierdzenie jest dla nas bezużyteczne: potrzebujemy implikacji odwrotnej, a prosty przykład (rys. 1) wskazuje, że nie można jej oczekiwać.

Definicja 1. Skończony ciąg prostych $(m_0, m_1, \ldots, m_{n-1})$ nazywamy ciągiem Pratta dla wielokąta $P = [V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}]$, gdy:

(a) proste $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$ są różne,
(b) prosta m_i przechodzi przez wierzchołek V_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$,
(c) jeśli W_i jest punktem wspólnym prostych m_i i m_{i-1}, to zachodzi równość

$$\prod_{i=0}^{n-1}\frac{\overrightarrow{W_iV_i}}{\overrightarrow{V_iW_{i+1}}}=1 \qquad (\text{lub } (-1)^n).$$

Liczbę 1 lub -1, występującą w warunku (c),

nazywamy wartością stowarzyszoną z ciągiem Pratta. Dla n nieparzystych mamy zatem dwa rodzaje ciągów Pratta.

Wybierzmy liczbę naturalną $r < \frac{n}{2}$ względnie pierwszą z n, a punkt wspólny prostych m_i oraz $V_{i-r}V_{i+r}$ oznaczmy U_i. W_i niech oznacza tym razem punkt wspólny prostych m_i oraz m_{i-r}.

Twierdzenie 2. Przy wyżej wprowadzonych oznaczeniach

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\overrightarrow{W_iV_i}}{\overrightarrow{V_iW_{i+r}}} = (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\overrightarrow{V_{i+r}U_i}}{\overrightarrow{U_iV_{i-r}}}.$$

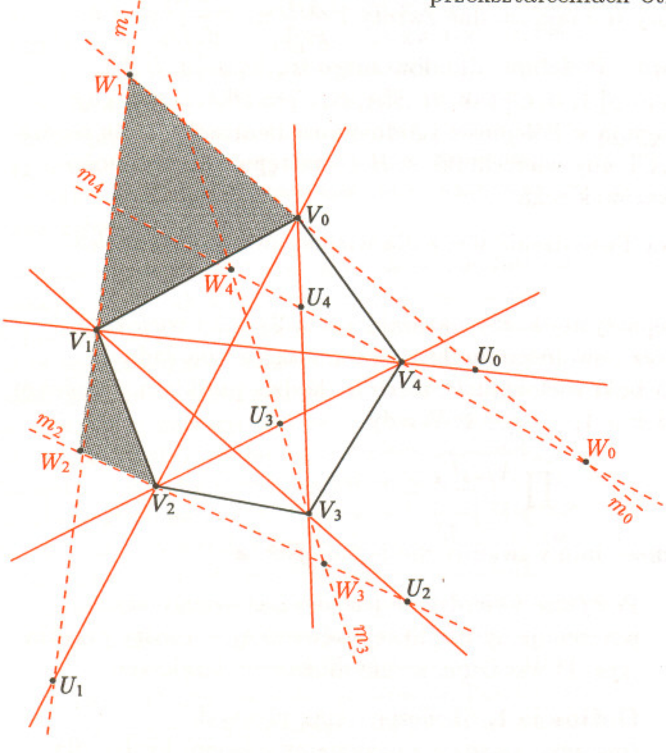
Dowód. Rozważmy trójkąty $[V_i, W_i, V_{i-r}]$ i $[V_{i+r}, W_{i+r}, V_i]$ oraz wybierzmy jako podstawy tych trójkątów odcinki $[W_i, V_i]$ i $[V_i, W_{i+r}]$ (rys. 2 dla $r = 1$). Wysokości opuszczone na wyróżnione boki są proporcjonalne do $[U_i, V_{i-r}]$ i $[U_i, V_{i+r}]$ (twierdzenie Talesa). Zatem

$$\frac{S\,[V_i, W_i, V_{i-r}]}{S\,[V_{i+r}, W_{i+r}, V_i]} = \frac{\overrightarrow{U_iV_{i-r}}}{\overrightarrow{U_iV_{i+r}}}\,\frac{\overrightarrow{W_iV_i}}{\overrightarrow{V_iW_{i+r}}} = -\frac{\overrightarrow{V_{i-r}U_i}}{\overrightarrow{U_iV_{i+r}}}\,\frac{\overrightarrow{W_iV_i}}{\overrightarrow{V_iW_{i+r}}}.$$

Po wymnożeniu n równań stronami otrzymujemy

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{S\,[V_i, W_i, V_{i-r}]}{S\,[V_{i+r}, W_{i+r}, V_i]} = (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\overrightarrow{V_{i-r}U_i}}{\overrightarrow{U_iV_{i+r}}}\,\frac{\overrightarrow{W_iV_i}}{\overrightarrow{V_iW_{i+r}}}.$$

Lewa strona tej równości jest, oczywiście, równa 1, ponieważ iloczyn liczników różni się od iloczynu mianowników tylko porządkiem czynników. Po prostych przekształceniach otrzymujemy tezę. ∎



Rys. 2

Wniosek. Równość

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\overrightarrow{V_{i+r}U_i}}{\overrightarrow{U_iV_{i-r}}} = \pm 1$$

jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby ciąg $(m_0, m_r, m_{2r} \ldots, m_{(n-1)r})$ był ciągiem Pratta z wartością stowarzyszoną ∓ 1.

Twierdzenie 3. Jeżeli $(m_0, m_1, \ldots, m_{n-1})$ jest ciągiem Pratta z wartością stowarzyszoną $(-1)^n$ dla n-kąta P i $n-1$ spośród prostych $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$ przechodzi przez pewien punkt W, to n-ta prosta też przechodzi przez W. (Oznacza to, między innymi, że ciągi Pratta dla trójkątów składają się z prostych współpękowych.)

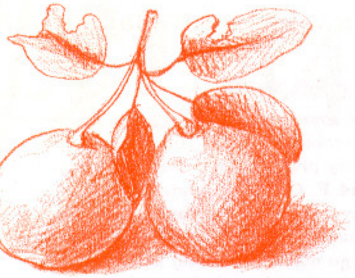
Dowód. Niech m_t będzie tą jedyną prostą nie przechodzącą przez punkt W. Wprowadźmy oznaczenia: W_t – punkt wspólny prostych m_t i m_{t-1} oraz W_{t+1} – punkt wspólny prostych m_{t+1} i m_t. Z założenia mamy

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\overrightarrow{W_iV_i}}{\overrightarrow{V_iW_{i+1}}} = (-1)^n\,.$$

Wszystkie czynniki powyższego iloczynu, z wyjątkiem trzech, są równe -1, zatem

$$\frac{\overrightarrow{WV_{t-1}}}{\overrightarrow{V_{t-1}W_t}}\,\frac{\overrightarrow{W_tV_t}}{\overrightarrow{V_tW_{t+1}}}\,\frac{\overrightarrow{W_{t+1}V_{t+1}}}{\overrightarrow{V_{t+1}W}} = -1.$$

Punkty W, W_t i W_{t+1} są niewspółliniowe, mamy więc trójkąt $T = [W, W_t, W_{t+1}]$ i, wobec powyższej równości, możemy zastosować twierdzenie odwrotne do twierdzenia Menelaosa dla trójkąta T i punktów V_{t-1}, V_t, V_{t+1}. Punkty V_{t-1}, V_t, V_{t+1} są więc współliniowe, co przeczy przyjętemu założeniu o niewspółliniowości trzech kolejnych wierzchołków wielokąta P. ∎



Jesteśmy gotowi do sformułowania tytułowego twierdzenia uogólniającego klasyczne twierdzenie Cevy.

Twierdzenie 4. (Cevy dla wielokąta, G.C. Shephard 1998). Niech $r < \frac{n}{2}$ będzie taką liczbą naturalną, aby r i n były względnie pierwsze. Dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ wybierzmy punkt U_i należący do prostej $V_{i-r}V_{i+r}$ (przekątnej lub boku wielokąta $P = [V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}]$) i oznaczmy przez m_i proste V_iU_i. Wówczas $(m_0, m_r, m_{2r} \ldots, m_{(n-1)r})$ jest ciągiem Pratta z wartością stowarzyszoną $(-1)^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\overrightarrow{V_{i+r}U_i}}{\overrightarrow{U_iV_{i-r}}} = 1.$$

Dowód. Oczywiste. ■

Korzystając z tego twierdzenia, Czytelnik z łatwością sformułuje i udowodni wiele twierdzeń o wielokątach. Zachęcamy do prób.

Pierwiastki sześcienne na kartce

Dla tych, którzy nie cierpią kalkulatorów itp. urządzeń, podajemy przepis na ręczne obliczanie pierwiastka sześciennego.

Aby wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby naturalnej n, dzielimy ją na grupy trzycyfrowe, zaczynając od prawej strony (ostatnia grupa z lewej może mieć jedną lub dwie cyfry). Liczba grup jest liczbą cyfr całkowitej części pierwiastka.

Pierwsza cyfra c_1 liczby $\sqrt[3]{n}$ to pierwiastek sześcienny z największego pełnego sześcianu, który nie przekracza pierwszej grupy. Odejmujemy ten sześcian od pierwszej grupy i spisujemy drugą grupę. Uzyskaną liczbę l dzielimy przez potrojony kwadrat pierwszej cyfry pierwiastka, a potem przez 100. Całkowita część wyniku jest drugą cyfrą pierwiastka (lub jest od drugiej cyfry pierwiastka o jeden większa).

Następnie od liczby l odejmujemy sześcian liczby utworzonej przez dwie znalezione cyfry pierwiastka i dodajemy 1000 sześcianów pierwszej cyfry pierwiastka. Z wynikiem postępujemy tak, jak poprzednio z liczbą l: dzielimy go przez potrojony kwadrat liczby utworzonej przez pierwsze dwie cyfry pierwiastka, a potem przez 100, znajdujemy trzecią cyfrę pierwiastka itp.

Jeśli ktoś chce znać wartość $\sqrt[3]{n}$ z dokładnością do kilku miejsc po przecinku, musi liczbę n uzupełnić po przecinku dziesiętnym odpowiednią liczbą grup trzycyfrowych złożonych z samych zer, a potem cierpliwie rachować... Niechęć do urządzeń mechanicznych (albo niemożność ich wykorzystania) wymaga poświęceń – wyciąganie pierwiastków sześciennych przypomina pod tym względem zdobywanie Kasprowego piechotą z nartami na grzbiecie: nudno i ciężko, choć wiadomo, że da się to zrobić.

PS

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 880. Udowodnić, że liczb kończących się cyfrą 5, których cyfry w zapisie dziesiętnym tworzą ciąg niemalejący (idąc od lewej do prawej) i które po podniesieniu do kwadratu zachowują tę własność, jest nieskończenie wiele.
Rozwiązanie na str. 15

M 881. Danych jest n liczb całkowitych ($n > 1$). Wiadomo, że każda z nich różni się od iloczynu wszystkich pozostałych o liczbę będącą wielokrotnością liczby n. Udowodnić, że suma kwadratów tych liczb jest podzielna przez n.
Rozwiązanie na str. 15

M 882. Udowodnić, że w dowolnym ciągu arytmetycznym (a_n) o wyrazach naturalnych istnieją dwa wyrazy o tej samej sumie cyfr.
Rozwiązanie na str. 6

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 499. Czy można posłużyć się kablem z cienkiego przewodu miedzianego w obudowie ołowianej do połączenia telefonicznego z balonem na uwięzi, który znajduje się na wysokości 300 m? Granica sprężystości ołowiu jest równa $2 \cdot 10^7$ N/m^2, a jego gęstość $11{,}3 \cdot 10^3$ kg/m^3.
Rozwiązanie na str. 8

F 500. Lina stalowa, która wytrzymuje ciężar nieruchomej kabiny windy, ma średnicę 9 mm. Jaką średnicę powinna mieć lina, jeżeli kabina windy przy gwałtownym zahamowaniu może uzyskać przyspieszenie do 8 g?
Rozwiązanie na str. 5