Kalkulator i pierwiastki

Jak obliczyć długość a krawędzi sześcianu, jeśli znamy jego objętość V? To proste: ponieważ $V = a^3$, więc $a = \sqrt[3]{V}$. No dobrze, ale jak obliczyć pierwiastek sześcienny powiedzmy z liczby 19, jeśli do dyspozycji mamy tylko niewielki kalkulator, który pozwala wykonywać jedynie cztery działania arytmetyczne i znajdować pierwiastki – jak na nieszczęście nie sześcienne, tylko kwadratowe?

Przepis na „ręczne" wyciąganie pierwiastka trzeciego stopnia jest podany na str. 13.

Każdy widzi, że przyciskając wielokrotnie klawisz z symbolem pierwiastka, dla danej liczby $a > 0$ możemy za pomocą takiego kalkulatora znaleźć nie tylko pierwiastek kwadratowy z a, lecz także każdy z pierwiastków

$$\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}, \qquad \sqrt{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[8]{a}, \qquad \sqrt{\sqrt[8]{a}} = \sqrt[16]{a}, \qquad \ldots$$

Żeby np. obliczyć pierwiastek czwartego stopnia, wystarczy dwukrotnie nacisnąć klawisz pierwiastka kwadratowego; trzykrotne naciśnięcie klawisza $\sqrt{\ }$ pozwoli uzyskać pierwiastek stopnia 8 itd. Ogólnie, naciskając n-krotnie klawisz $\sqrt{\ }$ możemy, jak łatwo sprawdzić, wyciągać pierwiastki stopnia 2^n.

Do pierwiastka sześciennego już niedaleko: wystarczy przypomnieć sobie, że $\sqrt[m]{a}$ to inaczej potęga liczby a o wykładniku $1/m$, $\sqrt[m]{a} = a^{1/m}$ (dla $n = 2$ i 3 tę wiedzę wbija się dziś do głów uczniom starszych klas podstawówki). Chcemy więc znaleźć $a^{1/3}$, a potrafimy znajdować $a^{1/2^n}$. Stosując wielokrotnie znany wzór $a^{x+y} = a^x a^y$, możemy napisać

$$(\star) \qquad \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots} = a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{16}} \cdot a^{\frac{1}{64}} \cdot \ldots = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[16]{a} \cdot \sqrt[64]{a} \cdot \ldots$$

Druga równość bierze się stąd, że $\frac{1}{3}$ to suma ciągu geometrycznego $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots$. (Znajdować wartości takich nieskończonych sum można się nauczyć przy okazji dzielenia jabłek, pomarańczy i pizzy – będzie można o tym poczytać w *Małej Delcie* za kilka miesięcy.)

Aby wykorzystać wzór $(\star)$ w praktyce, wystarczy znaleźć kilka początkowych pierwiastków stopni 4^n z danej liczby a i pomnożyć ich wartości. Wynik będzie niezłym przybliżeniem pierwiastka sześciennego z a, tym dokładniejszym, im więcej czynników weźmiemy. Na przykład dla $a = 27$, biorąc $n = 1, 2, 3, 4, 5$, otrzymamy przybliżenie $\sqrt[3]{27} \approx 2{,}996783$. Niezbyt to piękna metoda, lepsza jednak od samej kartki i ołówka.

A jak wyciągnąć za pomocą tego samego kalkulatora pierwiastek stopnia 5? Albo 17? Kto chce sam poszukać odpowiedzi, niech zauważy, że w układzie dwójkowym $1/3$ to $0{,}01010101\ldots$, a numery miejsc, na których po przecinku stoi jedynka, mówią, ile razy trzeba naciskać klawisz $\sqrt{\ }$, żeby obliczyć mnożone później pierwiastki stopni 4^n.

Rozwiązanie zadania F 499.
Kablem możemy posłużyć się tylko wtedy, gdy naprężenie podczas rozciągania, wywołane własnym ciężarem kabla, nie będzie większe od granicy wytrzymałości ołowiu. Napięcie to jest równe

$$\sigma = \frac{Q}{S},$$

gdzie $Q = \varrho g l S$ jest ciężarem liny o gęstości ϱ, polu przekroju poprzecznego S i długości l. Znajdujemy, że

$$\sigma = \varrho g l = 3{,}3 \cdot 10^7 \ \mathrm{N/m^2},$$

czyli nie możemy użyć takiego kabla.

O demokracji, wyborach i większości

Czy wiesz, co to demokracja? Wiesz, to z języka greckiego pochodzące słowo oznacza rządy ludu. A w jaki sposób lud rządzi? Też wiesz – wybiera swoich przedstawicieli, a oni w imieniu ludu sprawują władzę. Na polskich uczelniach w tym roku odbywają się wybory, w których pracownicy i studenci wybiorą swe władze na okres trzech lat. Wybory te będą demokratyczne, ale nie aż tak, jak wybory do Sejmu. To znaczy, że profesorowie będą mieli większe uprawnienia niż studenci, ich reprezentacja we władzach będzie liczniejsza niż reprezentacja studentów. O takim nierównym sposobie traktowania wyborców na uczelniach zdecydował Sejm (wprawdzie był on wtedy kontraktowy, ale nie miały zamiaru zmieniać tego nawet te arcydemokratycznie wybrane) i chyba domyślasz się dlaczego.

Jeśli więc równość nie jest atrybutem demokracji, to co nim jest? Ano to, że zasadnicze decyzje podejmuje większość. Na przykład, po to aby wybrać jakiegokolwiek członka władz uczelni, potrzebne jest uzyskanie przez niego większości ważnie oddanych głosów – tak to rozstrzyga Ustawa o Szkolnictwie Wyższym. Oczywiście, potrzebne jest też spełnienie innych warunków, ale ich określenie (jak i określenie, jaki głos jest ważny) Ustawa pozostawia decyzji poszczególnych uczelni. Prawnicy rozróżniają między bezwzględną większością głosów a zwykłą (głosów „za" więcej niż „przeciw"), w tym przypadku chodzi o większość bezwzględną.

Ale co to jest ta większość? Wydawałoby się, że o tym wie każdy sześciolatek, bo przecież gdy dzieci chętnych do zabawy jest np. troje, a zabaw do wyboru dwie, to o tym, którą zabawę wybrać, decyduje większość, czyli w naszym przypadku co najmniej dwoje (pomijam tu sytuację, w której ten trzeci potrafi zboksować dwóch pozostałych i w ten sposób zmusić ich do wyboru ulubionej przez siebie zabawy). Niemniej jednak okazuje się, że nie wszyscy dorośli Polacy wiedzą, co to jest większość. Często spotykam ludzi, którzy twierdzą (o zgrozo – nawet na zebraniach wyborczych na Uniwersytecie Warszawskim), że większość to „50% + 1 (głos)" i – o dziwo – nie są to tylko zakamieniali „humaniści". Ta nibydefinicja większości pochodzi zapewne ze słowników języka polskiego (np. Słownik PWN z 1981 roku) i stała się popularna, gdy narodziła się pierwsza Solidarność, i wielu Polakom po ponad 50 latach trzeba było uświadomić czym jest demokracja i czym jest większość. Gdyby autorom tego Słownika przyszło na myśl zajrzenie do Webstera, aby zobaczyć, jakie znaczenie nadają Anglosasi (ach, ta tradycja demokratyczna) słowu *majority*, nie trzeba by kopii kruszyć, o 50% + 1. A jest o co, bo przecież używanie tej nibydefinicji doprowadziło Sejm Najjaśniejszej Rzeczypospolitej – po wyborze generała Jaruzelskiego na prezydenta w roku 1989 – do podjęcia kompromitującej uchwały, z której niezbicie wynikało, że większość z 3 ponoć zaczyna się od 3, a nie od 2 (co niechybnie i słusznie stwierdzi każde dziecko z piaskownicy).

Tym więc, którzy w Twojej obecności będą mówić, że większość to pięćdziesiąt procent plus jeden, wytłumacz, proszę, że mówią bzdurę. Części z nich wystarczy powiedzieć:

większość to więcej niż połowa,

a tym, którzy domagają się precyzyjnego określenia jej kresu dolnego, powiedz:

jest to najmniejsza liczba całkowita przekraczająca połowę.

Jeśli zaś lubią oni matematykę przynajmniej na tyle, by odróżniać liczby parzyste od nieparzystych, wytłumacz, że nibydefinicja i poprawne określenie (kresu dolnego) prowadzą do tego samego rezultatu w przypadku liczb parzystych, w przypadku zaś liczb nieparzystych nibydefinicja prowadzi do katastrofy, bo nie tylko wynik jest różny od tego, który wynika z poprawnego określenia, ale przede wszystkim wynik ten nie jest liczbą całkowitą.

Małą Deltę przygotowali: Paweł STRZELECKI i Wojciech KOPCZYŃSKI