Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 1999

Skrót regulaminu

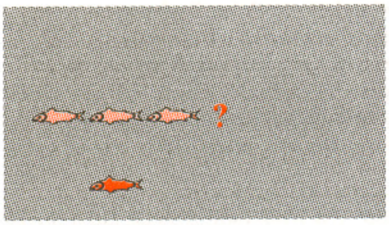
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Zadania z fizyki nr 278, 279

Redaguje Jerzy B. BROJAN

278. Ocenić orientacyjnie minimalną prędkość jazdy na nartach wodnych. Przyjąć masę narciarza równą 70 kg, a łączną powierzchnię nart równą 0,4 m^2.

279. Jak wiadomo, dla obserwatora patrzącego znad wody obraz przedmiotów położonych w głębi wody znajduje się płycej. W podręcznikach ten efekt bywa jednak ilustrowany różnie. Czy dla obserwatora patrzącego ukośnie obraz ten jest:
a) przesunięty względem przedmiotu tylko w pionie, czy również w poziomie, a jeśli tak, to w stronę obserwatora, czy w przeciwną (rys. 1)?
b) położony głębiej, niż dla patrzącego z góry, płycej, czy dokładnie na tej samej głębokości?



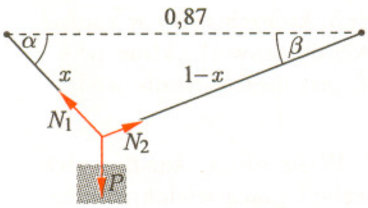
Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1999

Przypominamy treść zadań:

270. Końce lekkiego, nierozciągliwego sznurka o wytrzymałości 50 N i długości 1 m są przywiązane do haczyków umocowanych na tym samym poziomie i odległych o 0,87 m. Ile wynosi maksymalna wartość ciężaru, który można zawiesić na tym sznurku i w którym miejscu należy go zaczepić? Ile wynosi maksymalna wartość ciężaru, który można zawiesić w dowolnym miejscu na tym sznurku i w którym miejscu ryzyko zerwania jest największe?

271. Dane jest źródło stałego napięcia U i n jednakowych kondensatorów, które można łączyć w dowolny obwód, ładować ze źródła, rozłączać, łączyć ponownie, znów ładować itd. dowolną liczbę razy. Jakie maksymalne napięcie (maksymalne w sensie kresu górnego) można uzyskać w ten sposób?



Rys. 2

270. Oznaczmy zawieszony ciężar przez P, a kąty nachylenia odcinków sznurka do poziomu przez α i β (rys. 2). Z warunku równowagi sił w punkcie zawieszenia obliczamy siły napinające każdy z tych odcinków

$$N_1 = P\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad N_2 = P\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Na podstawie twierdzenia cosinusów można wyrazić kąty α i β przez parametr x opisujący położenie punktu zaczepienia ciężarka. Numeryczna analiza tych zależności pozwala stwierdzić, że przy podanych wartościach liczbowych maksymalny ciężar można zaczepić w punkcie $x = 0{,}148$ (lub też w symetrycznym punkcie $x = 0{,}852$), a wartość tego ciężaru wynosi 50,71 N. Największe ryzyko zerwania wystąpi natomiast w punkcie $x = 0{,}366$ (lub $x = 0{,}634$), a dopuszczalna wartość ciężaru wynosi 47,32 N. (Autor nie potrafił ustalić, czy możliwa jest dalej idąca dyskusja analityczna lub geometryczna tego problemu – ale może poradzi sobie z tym problemem któryś z Czytelników? Były już w historii Ligi takie przypadki...)

271. Rozwiążemy zadanie metodą rekurencji.
Dla $n=0$ dysponujemy tylko danym źródłem, czyli $U_0 = U$.
Dla $n=1$ maksymalne napięcie osiągniemy, ładując kondensator ze źródła, a następnie dołączając go do źródła szeregowo – łączne napięcie będzie więc równe $U_1 = 2U$.

Podobnie postępujemy dalej: aby znaleźć napięcie U_{n+1}, skonstruujmy ze źródła i n kondensatorów baterię o napięciu U_n i dołączmy do niej następny kondensator. Oczywiście, bateria częściowo się rozładuje – zatem trzeba będzie ją odłączyć, naładować ponownie, znów przyłączyć do ostatniego kondensatora i powtórzyć tę operację odpowiednią liczbę razy. Ostatecznie naładujemy go do napięcia dowolnie bliskiego U_n, a po ponownym naładowaniu zespołu pozostałych do napięcia U_n możemy całość zestawić szeregowo. Stąd $U_{n+1} = 2U_n$, czyli $U_n = 2^n \cdot U$.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 266 (WT=2,65) i 267 (WT=2,73) z numeru 11/1998

Jarosław Łazuka	– Warszawa	42,31
Marek Wójcicki	– Szczecin	41,14
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	27,31
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	22,08
Aleksander Surma	– Myszków	18,07

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 1999

Zadania z matematyki nr 381, 382

Redaguje Marcin E. KUCZMA

381. Mamy dwie identyczne talie po n kart ($n \geq 3$); na kartach każdej talii są napisane liczby od 1 do n, po jednej na każdej karcie. Przy okrągłym stole siedzi n osób; każda trzyma dwie karty. Co sekundę każda osoba podaje kartę z większą liczbą sąsiadowi z prawej strony (ruch jest wykonywany jednocześnie przez wszystkie n osób). Zabawa się kończy, gdy któraś z osób ma w ręce dwie jednakowe karty. Wyznaczyć wszystkie wartości n, dla których opisany proces może trwać nieskończenie. (Nie bierzemy pod uwagę czynników „niematematycznych”, jak np. śmierć uczestnika, zaśnięcie lub odmowa dalszego uczestnictwa w owej rozrywce, itp.)

382. Ciąg (a_n) jest określony wzorami:

$$a_0 = 2\,, \quad a_1 = a_2 = 1 \quad \text{oraz} \quad a_n = -\frac{3}{7}a_{n-1} - \frac{3}{7}a_{n-2} + \frac{4}{7}a_{n-3} \quad \text{dla} \quad n \geq 3.$$

Czy szereg $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny?

Zadanie **382** zaproponował pan Mirosław Matlęga ze Skoczowa.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 365 (WT=2,08) i 366 (WT=2,17) z numeru 9/1998

Maciej Mostowski	– Warszawa	47,09
Witold Bednorz	– Tychy	43,87
Zbigniew Skalik	– Pyskowice	42,45
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	42,19
Witold Bednarek	– Łódź	41,70
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	37,24

Nowa twarz w **Klubie 44 M**: pan Maciej Mostowski.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1999

Przypominamy treść zadań:

373. Niech J będzie zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych większych od 1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon J \to J$ spełniające warunek

$$(f(x^p y^q))^4 \leq f(x)^{1/p} f(y)^{1/q} \quad \text{dla } x, y > 1 \text{ oraz } p, q > 0.$$

374. Czy istnieje liczba całkowita $k \geq 1$, dla której iloraz $\dfrac{5^5 k^{10} - 1}{5k^2 - 1}$ jest liczbą pierwszą?

373. Niech f będzie jedną z szukanych funkcji. Przyjmijmy: $h(t) = \ln f(e^t)$. W podanej nierówności podstawiamy $x = e^s$, $y = e^t$ ($s, t > 0$) i sprowadzamy warunek nałożony na funkcję f do równoważnej postaci

$$(*) \qquad 4h(ps + qt) \leq \frac{h(s)}{p} + \frac{h(t)}{q} \qquad \text{dla} \quad s, t, p, q > 0.$$

Podstawiając teraz $p = 1/2$, $q = s/2t$, otrzymujemy nierówność

$$sh(s) \leq th(t) \qquad \text{dla} \quad s, t > 0.$$

Wobec symetrii ról zmiennych s, t nierówność ta musi być faktycznie równością, co oznacza, że funkcja $t \mapsto th(t)$ jest stała. Tak więc $h(t) = c/t$ dla pewnej stałej $c > 0$. Na odwrót, jeśli h jest funkcją takiej postaci, to warunek $(*)$ jest po prostu nierównością między średnią harmoniczną i średnią arytmetyczną liczb c/ps i c/qt – jest więc spełniony.

Wzór $h(t) = c/t$ $(c > 0)$ przedstawia zatem ogólne rozwiązanie nierówności $(*)$. Wobec tego ogólna postać funkcji f spełniającej warunek zadania jest dana wzorem $f(x) = a^{1/\ln x}$, gdzie $a = e^c$ jest dowolną stałą większą od 1.

374. Niech $k \geq 1$ będzie dowolną liczbą naturalną. Oznaczmy: $5k^2 = m$. Przekształcamy rozważany iloraz:

$$I = \frac{m^5 - 1}{m - 1} = m^4 + m^3 + m^2 + m + 1 = A^2 - B^2,$$

gdzie $A = m^2 + 3m + 1$, $B = (m+1)\sqrt{5m} = 5k(m+1)$.
Otrzymujemy rozkład na czynniki całkowite:
$I = (A + B)(A - B)$; przy tym $A - B > 1$, bo $m^2 \geq 5km$, $3m > 5k$. Zatem iloraz I nigdy nie jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie zadania M 880.
Dla dowolnej liczby naturalnej n niech $a_n = \underbrace{3\ldots3}_{n}5$. Cyfry liczb a_n tworzą ciąg niemalejący. Poza tym, $a_n = \dfrac{10^{n+1} + 5}{3}$. Łatwo sprawdzić, że

$$\left(\frac{10^{n+1} + 5}{3}\right)^2 = \left(10^{2n+1} + 10^{2n} + \ldots + 10^{n+2}\right) + 2\left(10^{n+1} + \ldots + 10\right) + 5,$$

czyli $a_n^2 = \underbrace{1\ldots1}_{n}\underbrace{2\ldots2}_{n+1}5$. Liczby a_n spełniają więc warunki zadania.

Rozwiązanie zadania M 881.
Oznaczmy dane liczby przez $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Niech $c_1 \cdot \ldots \cdot c_n = k$. Z treści zadania wynika, że $c_i - \frac{k}{c_i} = k_i n$, gdzie liczby k_i są całkowite ($i = 1, \ldots, n$). Zatem, mamy $c_i^2 = k + k_i n c_i$. Po zsumowaniu stronami wszystkich n równości dostajemy

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = nk + n\sum_{i=1}^{n} k_i c_i = n\left(k + \sum_{i=1}^{n} k_i c_i\right).$$