5/99 (17)

$\Gamma\lim\limits_{n\to\infty}$atias

JUBILEUSZ GAMMALIMATIASU

Γ-limatias obchodzi skromny jubileusz – ukazuje się po raz $[\sqrt{300}]$. Z tej okazji małe co nieco o liczbie 300.

1. Zgodnie z małym twierdzeniem Fermata dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej p zachodzi podzielność $p|2^{p-1}-1$. Natomiast gdy liczba p jest nieparzystą liczbą złożoną, to zachodzi podzielność $p|2^{\varphi(p)}-1$, gdzie φ jest funkcją Eulera. Dla niektórych liczb złożonych mamy jednak również $p|2^{p-1}-1$. Jeśli p jest najmniejszą taką liczbą, to $\varphi(p)=300$.

2. Każdy kąt można przy użyciu cyrkla i linijki podzielić na dwa równe kąty. Natomiast konstrukcja 1/3 danego kąta przy użyciu cyrkla i linijki w ogólnym przypadku nie jest możliwa. Można jednak skonstruować 1/5 kąta, i to bez użycia cyrkla i linijki. Oczywiście pod warunkiem, że dany kąt ma $300°$.

3. Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^{22}-n^2$ dzieli się przez 300.

4. $300=44+4^4$.

5. $300=5(55+5)$.

6. $300=\binom{4!+\frac{4}{4}}{\sqrt{4}}$.

7. Cecha podzielności przez 300. Podziel liczbę na grupy 4-cyfrowe, zaczynając od prawej strony (grupa najbardziej na lewo może mieć mniej niż 4 cyfry). Dodaj liczby utworzone przez te grupy. Tak otrzymana suma dzieli się przez 300 z taką samą resztą jak wyjściowa liczba. Pewna niedogodność: to wszystko działa w układzie siódemkowym i odnosi się do liczby $300_{(10)}=606_{(7)}$.

8. Potęga dwójki o wykładniku podzielnym przez 10 lubi rozpoczynać się cyfrą 1. Pierwszy wyjątek: $2^{300}=2037035976334486086268445688409378161051468$ $393665936250636140449354381299763336706183397376$.

9. $300=99\sqrt{9}+\sqrt{9}$.

10. W ciągu Fibonacciego ($F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$) występują wyrazy zawierające w swoim zapisie dziesiętnym ciągi złożone z 4 kolejnych jednakowych cyfr. Pierwszy wyraz, który zawiera takie 2 rozłączne ciągi, to $F_{300}=\mathbf{2222}322446294204455$ $297398934619099672\mathbf{0}\mathbf{6666}93909649976499079600$.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (14″)

Wyjaśnienie oszustwa (14′): Kwiecień to miesiąc Prima-Aprilisowy, a więc wyjaśnienia oszustw podawane w kwietniowych numerach Γ-limatiasu powinny być czytane ze szczególną uwagą.

W wyjaśnieniu oszustwa nie uwzględniliśmy sytuacji, w której równanie
$$x^2+ax=2x^2+3x+1$$
ma dwa rozwiązania, ale tylko dla jednego z nich obie strony są dodatnie, a więc dają rozwiązanie równania danego w zadaniu.

Otóż $\Delta>0$ dla $a\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$. Oznaczając $b=3-a$, otrzymujemy równanie kwadratowe $x^2+bx+1=0$, przy czym interesuje nas przypadek $|b|>2$. Równanie ma wówczas rozwiązania $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4}}{2}$.

Chcemy rozstrzygnąć, dla jakich b dokładnie jedna z liczb $L_{1,2}=x_{1,2}^2+(3-b)x_{1,2}$ jest dodatnia.
Zauważmy, że $L_{1,2}=x_{1,2}(x_{1,2}+3-b)$ oraz $x_{1,2}+3-b=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4}}{2}+3-b=\frac{6-3b\pm\sqrt{b^2-4}}{2}$.

Dla $b<-2$ mamy $6-3b\pm\sqrt{b^2-4}>6-2b>0$ i wobec $x_{1,2}>0$ mamy $L_{1,2}>0$, skąd wniosek, że wyjściowe równanie ma dwa rozwiązania.
Natomiast dla $b>2$ mamy $6-3b-\sqrt{b^2-4}<0$, skąd wobec $x_{1,2}<0$ jest $L_2>0$. Ponadto rozwiązując nierówność $6-3b+\sqrt{b^2-4}\geq 0$, otrzymujemy $6-3b\geq-\sqrt{b^2-4}$, co po podniesieniu do kwadratu (obie strony są ujemne, więc zmieniamy zwrot nierówności) daje $36-36b+9b^2\leq b^2-4$, i dalej $0\geq 8b^2-36b+40=4(2b-5)(b-2)$, skąd $2<b\leq\frac{5}{2}$. Wówczas $L_1\leq 0$ i wyjściowe równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, a mianowicie x_2. Pozostaje zauważyć, że $2<b\leq\frac{5}{2}$ odpowiada $\frac{1}{2}\leq a<1$. W połączeniu z rozważniami z poprzedniego numeru Γ-limatiasu otrzymujemy ostateczną i tym razem poprawną odpowiedź: równanie
$$\log_7(x^2+ax)=\log_7(2x^2+3x+1)$$
ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste x dla $a\in\left[\frac{1}{2},1\right)\cup\{5\}$.

JWR

GRY (2)

Znajdowanie wygrywającego ruchu w grze *Nim* wyjaśnimy na przykładzie. Przypuśćmy, że mamy wykonać ruch w sytuacji, gdy przed nami są 4 stosy składające się odpowiednio z 13, 7, 6 i 9 bierek. Obliczamy sumę dwójkową $13+_2 7+_2 6+_2 9=5$. Cieszy nas, że jest ona różna od 0, bo to oznacza, że jesteśmy na wygrywającej pozycji. Chcemy wykonać taki ruch, aby dwójkowa suma liczb bierek w poszczególnych stosach była równa 0.

Skoro dwójkowa suma liczb bierek jest równa 5, a chcemy z niej zrobić 0, to trzeba do któregoś stosu dwójkowo dodać 5 bierek. Próbujemy kolejno: $13+_2 5=8$, $7+_2 5=2$, $6+_2 5=3$, $9+_2 5=12$. Biorąc pod uwagę, że dozwolone są tylko te ruchy, które zmniejszają liczbę bierek, widzimy, że mamy aż 3 ruchy wygrywające: zabrać 5 bierek z I stosu lub 5 bierek z II stosu, lub 3 bierki z III stosu. Gdybyśmy natomiast chcieli wykonać ruch, zmieniając liczbę bierek w IV stosie, to musielibyśmy dołożyć 3 bierki, a na to reguły gry nie pozwalają.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl