Innymi słowy, krótkie rozwinięcie liczby $p/j = [a_0; \ldots; a_n]$ jest symetryczne: $a_i = a_{n-i}$. Gdyby $n = 2k$, to mielibyśmy $p/j = [a_0; \ldots; a_{k-1}; a_k; a_{k-1}, \ldots; a_0]$. Jest to jednak niemożliwe: wobec własności 4 licznik ułamka łańcuchowego z prawej strony jest liczbą złożoną. Zatem n jest liczbą nieparzystą i $p/j = [a_0; \ldots; a_k; a_k; \ldots; a_0]$. Wobec własności 5 licznik p tego ułamka łańcuchowego jest sumą dwóch kwadratów. Twierdzenie 1 zostało więc dowiedzione.

Dla Czytelników mamy dwie propozycje:

Zadanie. Udowodnić Twierdzenie 1 rozważając długie rozwinięcia i zbiór $\{p/\frac{p+1}{2}, \ldots, p/(p-2)\}$.

Problem. Łatwo zauważyć, że definicja funkcji Φ ma sens dla dowolnej liczby wymiernej większej od 2. Warto zbadać własności otrzymanej w ten sposób inwolucji.

Teraz łatwo już uzyskać następującą charakteryzację sum dwóch kwadratów:

Twierdzenie 2. *Liczba naturalna n jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy każda liczba pierwsza postaci $4k+3$ występuje w rozwinięciu liczby n na czynniki pierwsze w parzystej potędze.*

Dowód opiera się na dwóch obserwacjach. Po pierwsze, jeśli $n = a^2 + b^2$ i liczba pierwsza p postaci $4k+3$ dzieli n, to $p|a$ i $p|b$. Po drugie, jeśli $n = a^2 + b^2$ i $m = c^2 + d^2$, to wówczas $mn = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. Szczegóły tradycyjnie pozostawiamy Czytelnikowi.

Na zakończenie – uwaga natury ogólnej. W matematyce często się zdarza, że na pozór zupełnie nie związane z rozważanym problemem gałęzie są źródłem kluczowego pomysłu, który prowadzi do długo poszukiwanego rozwiązania. Powyższe rozważania stanowią miniaturowy przykład tej prawidłowości. Większość istotnych przełomów w matematyce została osiągnięta na tej właśnie drodze. Ważne jest więc, by Czytelnik poważnie zainteresowany jakąkolwiek dziedziną matematyki nie ograniczał się jedynie do problemów bezpośrednio z nią związanych, lecz wręcz przeciwnie, starał się zgłębiać przeróżne matematyczne teorie. Być może pewnego dnia zdoła je połączyć w swych rozważaniach i w nagrodę otrzyma wspaniały, niespodziewany wynik, czego szczerze i gorąco życzę.

Zadania

Przygotował Paweł STRZELECKI

M 877. Dane są dwie trójki różnych od zera liczb rzeczywistych, (x, y, z) oraz (a, b, c), o tej własności, że $a + b + c = x + y + z = 0$. Udowodnić, że
$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{x^3 + y^3 + z^3} = \frac{abc}{xyz}.$$
Rozwiązanie na str. 4

M 878. Dane są dwie trójki liczb dodatnich, (x, y, z) oraz (a, b, c). Wiadomo, że
$$\min(a,b,c) \le \min(x,y,z) \quad \text{oraz} \quad \max(x,y,z) \le \max(a,b,c)$$
Ponadto, $a + b + c = x + y + z$ i $abc = xyz$. Udowodnić, że zbiory $\{x, y, z\}$ i $\{a, b, c\}$ są równe.
Rozwiązanie na str. 7

M 879. Dziesięciu widzów ogląda w kinie nudny film. Wszyscy zajmują miejsca w tym samym rzędzie. Cierpliwość każdego z widzów wyczerpuje się, ale w losowej kolejności (każdą kolejność uznajemy za równoprawdopodobną). Widz zniecierpliwiony nudnym filmem od razu wychodzi z kina na świeże powietrze. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że któryś z widzów będzie zmuszony przeszkodzić innemu widzowi, żeby dostać się do wyjścia?
Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 497. Jaka jest rzeczywista głębokość rzeki, jeśli przy określaniu „na oko", w kierunku pionowym, jej głębokość wydaje się wynosić 2 m?
Rozwiązanie na str. 15

F 498. Jakie najmniejsze wymiary powinno mieć zwierciadło płaskie i jak je należy ustawić, żeby można się było w nim w całości obejrzeć?
Rozwiązanie na str. 10