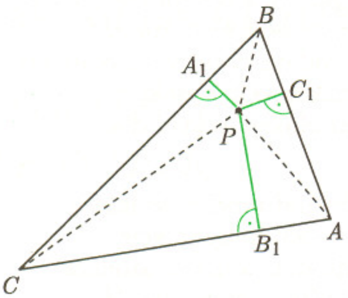
Wszystko można skomplikować

Tu będziemy komplikowali twierdzenie Pitagorasa. Za usprawiedliwienie niech nam posłuży fakt, że przed nami tę komplikację wykonał nie byle kto, bo Lazare Nicolas Marguerite Carnot, wybitny polityk, administrator i dowódca wojskowy Francji sprzed dwustu lat – oczywiście również wybitny matematyk, mechanik i inżynier. Jest on na dodatek związany z Warszawą, gdyż spędził tu kilka lat, wygnany z Francji po restauracji Burbonów w 1816 roku.



Rys. 1

Zanim podamy twierdzenie Carnota w pełnej ogólności, rozważmy jego szczególny przypadek. Weźmy mianowicie dowolny trójkąt ABC i dowolny punkt P (na rysunku 1 leży on we wnętrzu trójkąta, ale to nie ma żadnego znaczenia) i zrzutujmy go prostokątnie na boki trójkąta – otrzymamy odpowiednio punkty A_1, B_1 i C_1. Okazuje się, że

$$A_1B^2 - BC_1{}^2 + C_1A^2 - AB_1{}^2 + B_1C^2 - CA_1{}^2 = 0. \tag{1}$$

Faktycznie, stosując twierdzenie Pitagorasa do wszystkich sześciu trójkątów prostokątnych, które są na rysunku, otrzymujemy

$$PC^2 - CA_1{}^2 = PA_1{}^2 = PB^2 - A_1B^2,$$
$$PB^2 - BC_1{}^2 = PC_1{}^2 = PA^2 - C_1A^2,$$
$$PA^2 - AB_1{}^2 = PB_1{}^2 = PC^2 - B_1C^2.$$

Sumując prawe strony i lewe strony tych równości oraz przenosząc wszystko na lewą stronę, otrzymujemy (1).

Zauważmy też, że równość (1), w której nie występuje punkt P, wystarcza do tego, by taki punkt istniał. Rzeczywiście. Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostopadłych wystawionych w punktach A_1 i B_1 i opuśćmy prostopadłą z P na AB. Otrzymamy tam punkt C_1' również spełniający (na mocy tego, co już udowodniliśmy) równość (1). Zestawiając obie równości razem, otrzymujemy

$$-BC_1{}^2 + C_1A^2 = -BC_1'^2 + C_1'A^2, \quad \text{czyli} \quad C_1A^2 - C_1'A^2 = BC_1{}^2 - BC_1'^2.$$

Wyrażenia te muszą być oba równe zeru, czyli musi być $C_1 = C_1'$, gdyż w przeciwnym razie miałyby – mimo równości – przeciwne znaki.

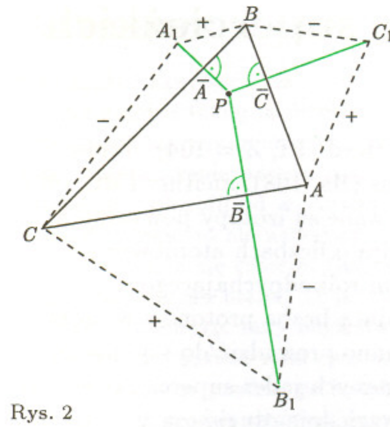
Sformułujmy teraz twierdzenie Carnota:

Z dowolnych punktów A_1, B_1 i C_1 prowadzimy proste prostopadłe do prostych BC, CA i AB odpowiednio, gdzie punkty A, B i C są wierzchołkami pewnego trójkąta. Te prostopadłe przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_1B^2 - BC_1{}^2 + C_1A^2 - AB_1{}^2 + B_1C^2 - CA_1{}^2 = 0,$$

czyli gdy jest spełniona równość (1).

Jak dotąd, udowodniliśmy to twierdzenie w przypadku, gdy punkty A_1, B_1 i C_1 leżą odpowiednio na prostych zawierających boki trójkąta.



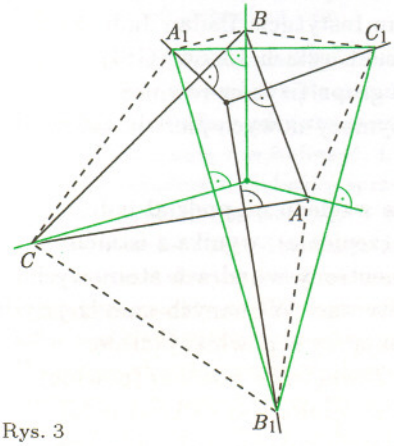
Rys. 2

Wykorzystamy to w dowodzie ogólnego przypadku. Niech prostopadłe, wystawione w punktach A_1, B_1 i C_1, przecinają się w punkcie P. Oznaczmy przecięcia tych prostych z prostymi zawierającymi boki trójkąta odpowiednio przez $\bar{A}$, $\bar{B}$ i $\bar{C}$ (rys. 2). Dodając i odejmując liczby $A_1\bar{A}^2$, $B_1\bar{B}^2$ i $C_1\bar{C}^2$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} A_1B^2 - BC_1{}^2 + C_1A^2 - AB_1{}^2 + B_1C^2 - CA_1{}^2 &= \\ &= (A_1B^2 - A_1\bar{A}^2) - (BC_1{}^2 - C_1\bar{C}^2) + (C_1A^2 - C_1\bar{C}^2) - \\ &\quad - (AB_1{}^2 - B_1\bar{B}^2) + (B_1C^2 - B_1\bar{B}^2) - (CA_1{}^2 - A_1\bar{A}^2) = \\ &= \bar{A}B^2 - B\bar{C}^2 + \bar{C}A^2 - A\bar{B}^2 + \bar{B}C^2 - C\bar{A}^2 = 0. \end{aligned}$$

Ostatnia z równości to właśnie ten szczególny przypadek, udowodniony na poprzedniej stronie. Dowód w drugą stronę przebiega też tak, jak tam.

Tak więc rzeczywiście w twierdzeniu Carnota nie ma niczego więcej, niż jest w twierdzeniu Pitagorasa – jak jednak jest to pięknie uogólnione. Szczególnie polecam wykonanie sobie kilku rysunków, tak by punkt przecięcia prostopadłych (bo od niego trzeba zacząć rysowanie!) leżał z różnych stron trójkąta.



Rys. 3

A teraz twierdzenie, które można udowodnić zupełnie „po grecku", to znaczy bez żadnego rozumowania, a jedynie poprzez umiejętne spojrzenie na problem.

Proste prostopadłe poprowadzone z tworzących trójkąt punktów A_1, B_1 i C_1 do prostych zawierających boki trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy proste prostopadłe poprowadzone z punktów A, B i C do prostych zawierających boki trójkąta $A_1B_1C_1$ przecinają się w jednym punkcie.

Co trzeba zobaczyć? Oczywiście to (rys. 3), że w obu przypadkach wzór (11) będzie wyglądał tak samo.

A swoją drogą, gdyby nie wiedzieć, że to zwykłe twierdzenia Pitagorasa, to można by się takich twierdzeń, jak wypisane wyżej, przestraszyć.

Inne liczby

Jeżeli weźmiemy pod uwagę tylko początkowy odcinek liczb naturalnych $0, 1, 2, \ldots, m-1$ i będziemy jego elementy dodawać i mnożyć (odejmowanie i dzielenie wyraża się, rzecz jasna, przez dodawanie i mnożenie) w ten sposób, że wynikiem działania będzie reszta z podzielonego przez m wyniku zwykłego działania, to otrzymamy coś zupełnie innego od zwykłych liczb. Takie coś oznacza się symbolem $\mathbf{Z}_m$. Gdy m jest liczbą pierwszą, to działania w $\mathbf{Z}_m$ mają wszystkie podstawowe własności algebraiczne takie same, jak np. liczby rzeczywiste czy wymierne.

Można to, oczywiście, sprawdzić, ale tu zrobimy inaczej. Obejrzymy różne $\mathbf{Z}_p$ (niech litera p oznacza, że interesują nas liczby pierwsze) i na przykładach przekonamy się, że wzory na rozwiązywanie równań kwadratowych są w $\mathbf{Z}_p$ takie same, jak dla liczb rzeczywistych – działa wzór

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{gdzie} \quad \Delta = b^2 - 4ac,$$

opisujący pierwiastki równania $ax^2 + bx + c = 0$, choć wyniki liczbowe są zupełnie inne.

Zobaczmy to na przykładzie równania

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

które, jak wiadomo, nie ma pierwiastków rzeczywistych, a to dlatego, że

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

nie jest wśród liczb rzeczywistych kwadratem żadnej liczby.

Zauważmy jednak, że ta sama Δ w $\mathbf{Z}_3$ jest równa 0 i, rzeczywiście, równanie ma jeden pierwiastek

$$\frac{-1 \pm 0}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

W $\mathbf{Z}_5$ znowu pierwiastków nie ma – znów dobrze, bo jedyne kwadraty wśród tych liczb to 0, 1 i 4, a $\Delta = 2$.

W $\mathbf{Z}_7$ z kolei są dwa pierwiastki, też się zgadza, bo $\Delta = 4 = 2^2 = 5^2$ i pierwiastkami są

$$\frac{-1+2}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} = 4 \qquad \text{i} \qquad \frac{-1+5}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

(czterech pierwiastków nie ma, bo przecież $-2 = 5$).

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS