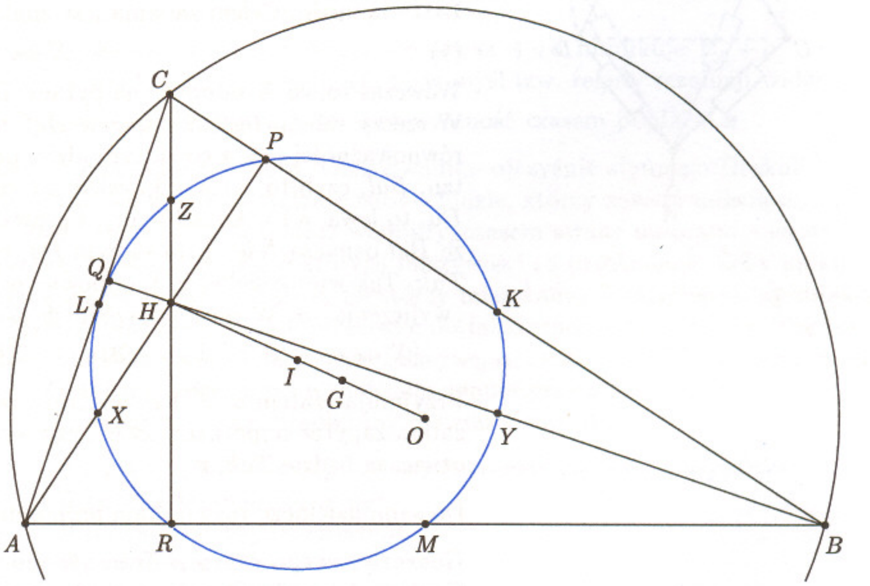
Sfera dwunastu punktów

Michał ŚLĘZAK, Michał TKACZ

Skrót pracy nagrodzonej we wrześniu 1998 r. srebrnym medalem w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki.

1. Wstęp. Wiele zagadnień związanych z geometrią na płaszczyźnie znajduje swoje odpowiedniki w stereometrii. W niniejszej pracy zajmiemy się jedną z takich analogii. Nie będą to jednak podstawowe prawa, jak np. podobne własności trójkąta i czworościanu. Spróbujemy znaleźć powierzchnię, która jest odpowiednikiem okręgu dziewięciu punktów.

2. Okrąg dziewięciu punktów – wiadomości wstępne. Przypomnijmy podstawowe wiadomości dotyczące okręgu dziewięciu punktów. Dany jest dowolny trójkąt ABC. Niech K, L i M oznaczają środki boków tego trójkąta i niech P, Q, R będą spodkami wysokości opuszczonych z wierzchołków A, B i C odpowiednio. Ponadto, niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC, a O środkiem okręgu na nim opisanego. Środki odcinków łączących ortocentrum H z wierzchołkami trójkąta oznaczmy przez X, Y i Z (rys. 1).



Rys. 1

Definicja/Twierdzenie 2.1. Okręgiem dziewięciu punktów nazywamy okrąg przechodzący przez punkty K, L, M, P, Q, R, X, Y i Z. Środek I tego okręgu leży w połowie odcinka HO.

Dziewięć szczególnych punktów trójkąta wyznacza więc okrąg, co może się wydać zaskakujące, bowiem już trzy punkty jednoznacznie wyznaczają okrąg. Z okręgiem dziewięciu punktów związana jest tzw. prosta Eulera. Jest to prosta przechodząca przez ortocentrum H i środek O okręgu opisanego. Jak już wiemy, zawiera ona środek okręgu dziewięciu punktów. Ponadto leży na niej środek ciężkości G, przy czym $\frac{HG}{GO} = 2$. Szczegółowe dowody powyższych własności można znaleźć w [1].

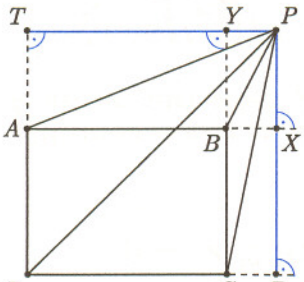
3. Okrąg dziewięciu punktów a przestrzeń – hipotezy. W dalszych rozważaniach potrzebne będą jeszcze dwie własności. Pierwsza z nich to fakt, że środkowe w czworościanie przecinając się, dzielą się w stosunku 1:3. Dowód jest prosty, dlatego nie będziemy go tu zamieszczać. Wynika z niego również, że czworościan utworzony ze środków ciężkości ścian jest podobny do wyjściowego czworościanu, a skala podobieństwa wynosi 1/3.

Możemy podejrzewać, że z czworościanem będzie związana powierzchnia, analogiczna do okręgu dziewięciu punktów. Aby określić tę powierzchnię,

Rozwiązanie zadania M 874.
Oznaczmy rzuty prostokątne P na proste zawierające boki prostokąta $ABCD$ przez X, Y, Z, i T.
Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$PA^2 = PT^2 + PX^2,$$
$$PB^2 = PX^2 + PY^2,$$
$$PC^2 = PY^2 + PZ^2,$$
$$PD^2 = PZ^2 + PT^2,$$

co po zsumowaniu daje tezę.



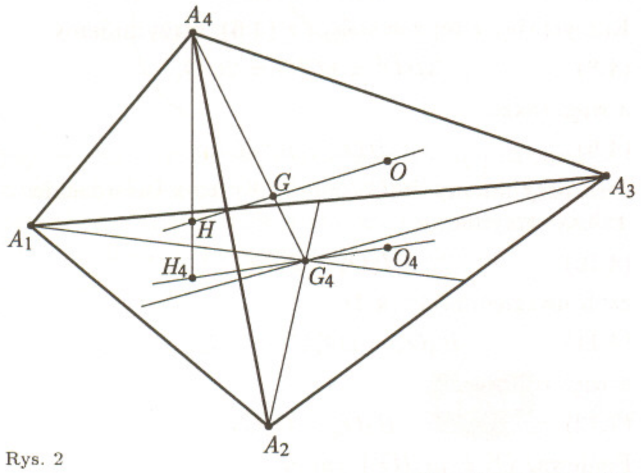
zastanówmy się, czemu w czworościanie odpowiadają wymienione w definicji 2.1 szczególne punkty trójkąta.

Środkom boków trójkąta, zgodnie z intuicją i doświadczeniem, odpowiadać będą środki ciężkości ścian czworościanu. Mogłyby to, co prawda, być również środki okręgów opisanych na ścianach bocznych, jednak taki wybór nie dałby ciekawego rezultatu. Punktom P, Q, R odpowiadać będą przypuszczalnie spodki wysokości opuszczonych z wierzchołków czworościanu. Logiczne będzie również zastąpienie punktów X, Y i Z środkami odcinków łączących ortocentrum czworościanu z jego wierzchołkami, jednak nie wszystkie czworościany mają ortocentrum. Czworościan ma ortocentrum, gdy każde dwie przeciwległe krawędzie są prostopadłe (tzn. istnieje płaszczyzna zawierająca jedną z nich, prostopadła do drugiej) lub (co jest warunkiem równoważnym) spodkiem każdej wysokości czworościanu jest ortocentrum przeciwległej ściany.

Definicja 3.1. Czworościan, mający ortocentrum, nazywamy ortocentryczny.

Dla dalszych rozważań konieczne jest więc założenie, że badany czworościan jest ortocentryczny.

4. Sfera dwunastu punktów. Weźmy dowolny, ortocentryczny czworościan $A_1A_2A_3A_4$ i wprowadźmy następujące oznaczenia (rys. 2):



Rys. 2

π_i	–	ściana czworościanu naprzeciw wierzchołka A_i lub jej płaszczyzna,
H_i	–	ortocentrum ściany π_i i równocześnie spodek wysokości z wierzchołka A_i,
G_i	–	środek ciężkości ściany π_i,
O_i	–	środek okręgu opisanego na ścianie π_i,
H	–	ortocentrum czworościanu,
G	–	środek ciężkości czworościanu,
O	–	środek sfery opisanej na czworościanie,
$\mathrm{pr}_i(X)$	–	rzut punktu X na płaszczyznę π_i.

Punkty A_4, H_4 i O_4 są niewspółliniowe (H_4 i O_4 w przeciwieństwie do A_4 leżą w płaszczyźnie π_4), a więc wyznaczają płaszczyznę. Płaszczyzna ta jest prostopadła do π_4, bo A_4H_4 jest wysokością. Do płaszczyzny tej należą również H ($H \in A_4H_4$, bo H jest przecięciem wysokości), O (A_1, A_2, A_3 należą do sfery opisanej, wycinając z niej okrąg $A_1A_2A_3$; promień sfery przechodzący przez środek tego okręgu jest prostopadły do jego płaszczyzny), G_4 (G_4 należy do prostej H_4O_4 – własność prostej Eulera) i G ($G \in A_4G_4$, bo G jest przecięciem środkowych). Rysunek 3 przedstawia przekrój czworościanu tą płaszczyzną.

Wiemy, że G dzieli środkową A_4G_4 czworościanu w stosunku 3:1, tzn.

$$\frac{A_4G}{GG_4} = 3. \tag{4.1}$$

Z równości tej, stosując twierdzenie Talesa dla $\angle H_4G_4A_4$, otrzymujemy:

$$\frac{H_4G_4'}{G_4'G_4} = 3, \tag{4.2}$$

przy czym za G_4' przyjmujemy rzut prostopadły G na H_4O_4 (a więc i na płaszczyznę π_4, $G_4' = \mathrm{pr}_4(G)$). Ponadto z własności prostej Eulera wiemy, że

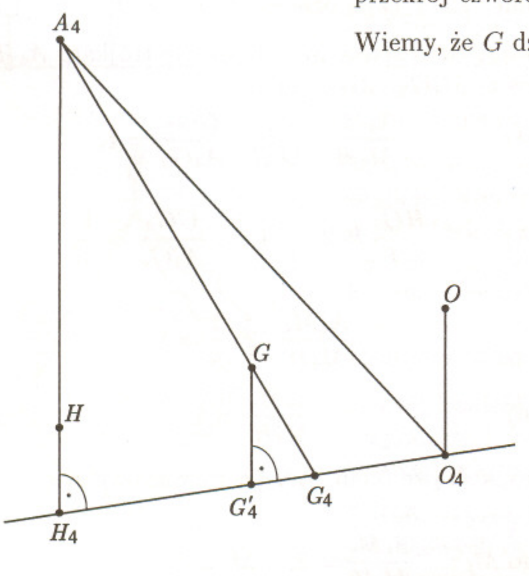
$$\frac{H_4G_4}{G_4O_4} = 2. \tag{4.3}$$

Z (2.1) i (4.3) wynika zaś, że

$$2H_4G_4' = 6G_4'G_4 = 3G_4O_4, \tag{4.4}$$

czyli także

$$H_4G_4' = G_4'O_4. \tag{4.5}$$

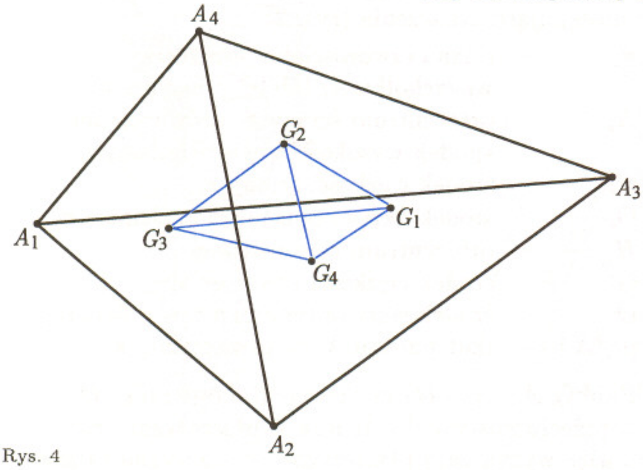


Rys. 3

Ponieważ analogicznie możemy zdefiniować trzy pozostałe płaszczyzny $A_iH_iO_i$ i każda z nich zawiera H, G i O, zatem płaszczyzny te muszą się przecinać w prostej, do której należą H, G i O, czyli punkty te są współliniowe. Ponieważ jednak $H_4G'_4 = G'_4O_4$, a punkty H_4 i O_4 są rzutami punktów H, G i O odpowiednio, mamy więc

(4.6) $$HG = GO.$$

Niech S będzie sferą opisaną na czworościanie $G_1G_2G_3G_4$ (punkty te są zawsze niewspółpłaszczyznowe, rys. 4). Sprawdzimy teraz, czy $H_i \in S$. Wiemy już, że czworościan $G_1G_2G_3G_4$ jest podobny do $A_1A_2A_3A_4$, a skala podobieństwa wynosi 1:3. Niech δ oznacza jednokładność o środku w punkcie G i skali $-\frac{1}{3}$. Obrazem punktu A_i w tej jednokładności jest punkt G_i (środkowe A_iG_i przecinają się w G, dzieląc się w stosunku 1:3). Ponieważ jednokładność nie zmienia stosunków odległości, więc punkt równo odległy od punktów $A_1, \ldots, A_4$ – czyli środek sfery opisanej na czworościanie, punkt O – przekształca się w punkt równo odległy od punktów $G_1, \ldots, G_4$ – czyli środek sfery S, punkt O' (czyli $\delta(O) = O'$, rys. 5). Ponieważ środek jednokładności G i punkt O leżą w omawianej wcześniej płaszczyźnie, O' również musi w niej leżeć. Co więcej, leży on na prostej GO i



Rys. 4

(4.7) $$GO = 3GO'.$$

Korzystając z tej równości i z (4.6), otrzymujemy:

(4.8) $$3HO' = 6O'G = 2GO,$$

a więc także

(4.9) $$HO' = 2O'G.$$

Jeśli przyjmiemy, że $O'_4 = \mathrm{pr}_4(O')$, to z twierdzenia Talesa otrzymamy

(4.10) $$H_4O'_4 = 2O'_4G'_4,$$

czyli uwzględniając (4.4)

(4.11) $$H_4O'_4 = 2O'_4G'_4 = 2G'_4G_4,$$

a więc również

(4.12) $$H_4O'_4 = O'_4G_4.$$

Ponieważ $O'_4 = \mathrm{pr}_4(O')$, zatem

(4.13) $$H_4O' = G_4O',$$

czyli $H_4 \in S$ (do S należy G_4) i analogicznie $H_i \in S$.

Niech M_4 będzie punktem przecięcia wysokości A_4H_4 ze sferą S. Kąt $A_4H_4O_4$ jest prosty, więc M_4G_4 jest średnicą sfery, czyli przechodzi przez O'.

Stosując twierdzenie Menelaosa dla trójkąta A_4HG i prostej M_4G_4, otrzymujemy:

(4.14) $$\frac{A_4M_4}{M_4H} \cdot \frac{HO'}{O'G} \cdot \frac{GG_4}{A_4G_4} = 1,$$

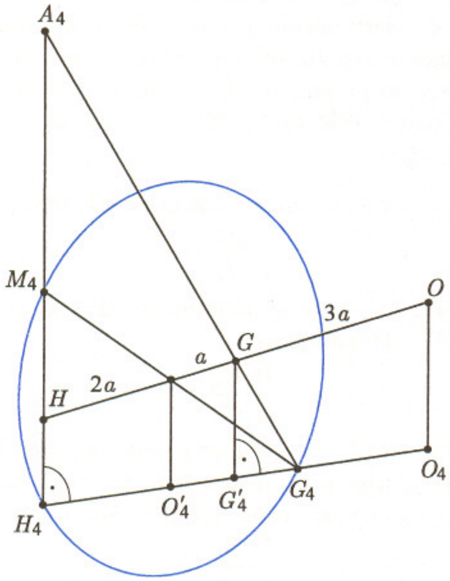
ale

(4.15) $$\frac{HO'}{O'G} = 2 \quad \text{i} \quad \frac{GG_4}{A_4G_4} = \frac{1}{4},$$

więc

$$\frac{A_4M_4}{M_4H} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 1,$$

(4.16) $$\frac{A_4M_4}{M_4H} = 2.$$



Rys. 5

Stosunek ten nie zależy od tego, którą ze ścian $A_iH_iO_i$ rozważamy, więc możemy powiedzieć, że:

$$\text{dla każdego } M_i: \quad \frac{A_iM_i}{M_iH} = 2, \quad M_i \in S.$$

Bibliografia

[1] Coxeter H., *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN, Warszawa 1967.

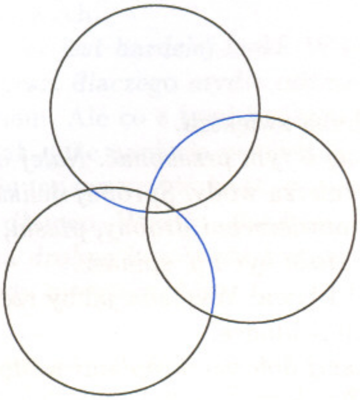
[2] *Mały słownik matematyczny*, WP, Warszawa 1975.

Znaleźliśmy więc sferę, na której leży 12 szczególnych punktów czworościanu (środki ciężkości ścian G_i, spodki wysokości H_i i punkty M_i dzielące odcinki A_iH w stosunku 2:1). Cały dowód został przeprowadzony przy założeniu, że czworościan jest ortocentryczny.

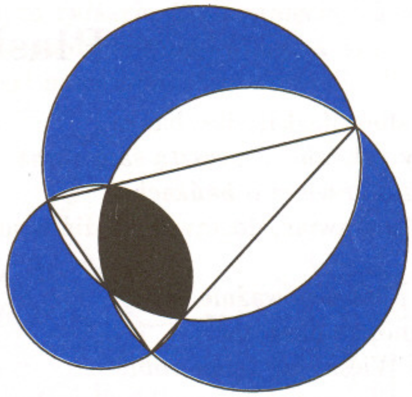
Istnienie takiej figury pozwala przypuszczać o istnieniu twierdzeń z nią związanych, analogicznych do tych dotyczących okręgu dziewięciu punktów na płaszczyźnie.

Dlaczego?

Geometryczne problemy bardzo często pociągają nas swoją estetyką, symetrią, która jest jakby wyższego rzędu od lustrzanych odbić. Oto dwa przykłady.



Trzy tej samej wielkości okręgi parami się przecinają. Zaznaczone kolorem łuki dają w sumie półokrąg również wtedy, gdy trójkąt utworzony przez środki nie jest równoboczny, ani nawet równoramienny.
Dlaczego?



Boki trójkąta ostrokątnego są odpowiednio średnicami trzech okręgów. Różnica sumy pól kolorowych i pola czarnego jest akurat dwa razy większa od pola trójkąta.
Dlaczego?

M.K.

Zadania

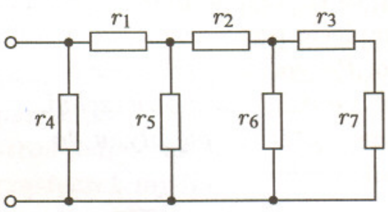
Przygotował Marek KORDOS

M 874. Wykazać, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu od wierzchołków danego prostokąta jest dwa razy większa od sumy kwadratów jego odległości od prostych zawierających boki tego prostokąta.
Rozwiązanie na str. 4

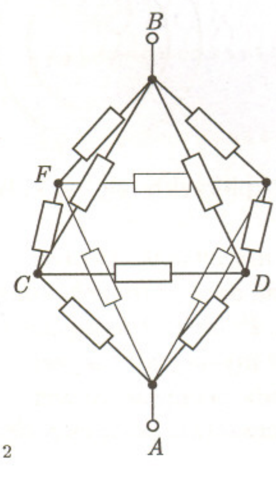
M 875. Wykazać, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu danego okręgu, mającego środek w środku ciężkości danego trójkąta od jego wierzchołków, ma wartość niezależną od wyboru tego punktu.
Rozwiązanie na str. 16

M 876. Ramiona kąta prostego o wierzchołku W, leżącym w jednym ze środków symetrii dwu danych prostych równoległych a i b, przecinają te proste w punktach A i B. Wykazać, że odległość W od prostej AB nie zależy od wyboru kąta prostego.
Rozwiązanie na str. 14

Redaguje Ewa CZUCHRY



Rys. 1



Rys. 2

F 495. Znaleźć opór zastepczy układu przedstawionego na rysunku 1, przyjmując $r_1 = r_2 = r_3 = r_7 = 1\ \Omega$, a $r_4 = r_5 = r_6 = 2\ \Omega$.
Rozwiązanie na str. 15

F 496. Wyznaczyć opór zastępczy pokazanego na rysunku 2 układu jednakowych oporników.
Rozwiązanie na str. 3