O rycerzach, łotrach, wampirach i niespełna rozumu Zombich – czyli zagadki logiczne R.M. Smullyana

Adam KOLANY

Jeszcze nie tak dawno w szkole średniej uczono elementów logiki matematycznej. Sprowadzało się to właściwie do elementarnych wiadomości głównie z zakresu klasycznego rachunku zdań, a dokładniej do prezentacji tzw. metody *zero-jedynkowej* rozstrzygania tautologiczności schematów zdaniowych. W artykule tym zobaczymy, w jaki sposób można niemal automatycznie rozwiązywać pewien typ zagadek logicznych R.M. Smullyana, korzystając z elementarnych wiadomości z zakresu logiki zdań właśnie.

W ogromnym skrócie: logika zdań zajmuje się dociekaniem warunków poprawności tzw. schematów zdaniowych. Jest to o tyle ważne, że schematy takie są logiczną podstawą poprawnych rozumowań (niektórzy twierdzą, że innych niż poprawne rozumowań nie ma – pozostałe to bełkot!). Kiedyś logika była odrębnym przedmiotem w szkołach (i słusznie – brak tzw. higieny logicznej u współczesnych jest zatrważający).

W jednej ze wspomnianych na marginesie książeczek znajdujemy następującą zagadkę:

Pewnego razu spotkałem dwóch mieszkańców *A* i *B* rzeczonej wyspy. Zapytawszy *A*, czy jest łotrem, usłyszałem: Jestem łotrem, ale *B* nie! Co możemy powiedzieć o *A* i *B*?

Sytuacja, w której odbywa się scenka z zagadki, jest następująca: istnieje gdzieś wyspa, którą zamieszkują dwa rodzaje mieszkańców: rycerze i łotry. Rycerze są bezwzględnie prawdomówni, łotry zaś bezwarunkowo łżą. Tym sposobem, cokolwiek powie łotr, jest fałszywe, a cokolwiek powie rycerz, jest na pewno prawdziwe.

Spójnik $\leftrightarrow$, zwany *równoważnością* ma następujące własności, które będą nam potrzebne:

1. $\alpha \leftrightarrow \alpha = 1, \quad \alpha \leftrightarrow \alpha' = 0$,
2. $\alpha \leftrightarrow \beta = \beta \leftrightarrow \alpha$,
3. $\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \delta) = (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \delta$,
4. $(\alpha \leftrightarrow \beta)' = \alpha \leftrightarrow \beta'$.
5. $\alpha \leftrightarrow 1 = \alpha, \quad \alpha \leftrightarrow 0 = \alpha'$,
6. $\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \cdot \beta + \alpha' \cdot \beta')$,

gdzie α' oznacza negację zdania α, 0 oznacza fałsz, 1 oznacza prawdę, $\alpha \cdot \beta$ oznacza koniunkcję zdań α i β, a $\alpha + \beta$ – ich alternatywę, a $\alpha \to \beta$ – implikację, $\alpha = \beta$ oznacza równość ich wartości logicznych.

Rozwiązanie. Niech, dla dowolnego mieszkańca X tej wyspy oraz zdania α, symbol $X \lhd \alpha$ oznacza, że X powiedział, że α. Niech dalej T_X oznacza, że X jest prawdomówny (czyli jest rycerzem) oraz niech F_X oznacza, że X jest łgarzem (tj. łotrem). Zauważmy, że warunki zadania narzucają, że $X \lhd \alpha$ równoznaczne jest ze stwierdzeniem, że T_X i α mają tę samą wartość logiczną, tj. $X \lhd \alpha$ znaczy tyle samo, co $\mathrm{T}_X \leftrightarrow \alpha$. Innymi słowy:

$$X \lhd \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{T}_X \leftrightarrow \alpha.$$

Zamiast pisać $\alpha = 1$ piszemy po prostu α – mając w domyśle, że jak formuła się pojawia podczas rozwiązania, to uznajemy ją za prawdziwą.

Ponieważ na wyspie mieszkają jedynie rycerze i łotry, mamy $\mathrm{T}'_X = \mathrm{F}_X$. Mamy:

$$\begin{aligned} A \lhd (\mathrm{F}_A \cdot \mathrm{T}_B) = \mathrm{T}_A \leftrightarrow (\mathrm{F}_A \cdot \mathrm{T}_B) &= \mathrm{T}_A\mathrm{F}_A\mathrm{T}_B + \mathrm{T}'_A(\mathrm{F}'_A + \mathrm{T}'_B) = \\ &= \mathrm{T}_A\mathrm{T}'_A\mathrm{T}_B + \mathrm{F}_A\mathrm{F}'_A + \mathrm{F}_A\mathrm{F}_B = \mathrm{F}_A\mathrm{F}_B. \end{aligned}$$

Wiadomo także, że jeśli $\alpha \leftrightarrow \beta$, to α i β są wzajemnie wymienialne w dowolnym kontekście bez zmiany wartości logicznej.

Tym samym zarówno mówiący, jak i jego towarzysz są łotrami. ■

To zadanie było oczywiście łatwe także do rozwiązania „zwykłymi” środkami. Spróbujmy innego.

W rachunkach obok korzystamy ze znanych praw logiki:

$$(\alpha \cdot \beta)' \leftrightarrow (\alpha' + \beta'),$$

$$\alpha(\beta + \delta) \leftrightarrow (\alpha\beta + \alpha\delta).$$

W pewnym ogrodzie rozmawiają trzej mieszkańcy: *A*, *B* i *C*. Przechodzący obok przybysz pyta *A*, ilu wśród nich jest rycerzy. Choć *A* odpowiedział, przybysz nie dosłyszał odpowiedzi i zwrócił się do *B* z prośbą o powtórzenie odpowiedzi *A*. Ten odpowiada: »*A* powiedział, że jest wśród nas jeden rycerz«. W tym momencie *C* protestuje: »Nie wierz w to, *B* kłamie!«. Co można powiedzieć o *A*, *B* i *C*?

Rozwiązanie. Dla wygody, zamiast T_X piszmy po prostu X, gdzie $X = A, B, C$. Mamy:

$$B \lhd [A \lhd (A'B'C + A'BC' + AB'C')]$$

i

$$C \lhd B'.$$

Wobec tego:

$$C \leftrightarrow B' \qquad \text{oraz} \qquad B \leftrightarrow A \leftrightarrow (A'B'C + A'BC' + AB'C').$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} &[B \leftrightarrow A \leftrightarrow (A'B'C + A'BC' + AB'C')] = \\ &= [B \leftrightarrow A \leftrightarrow (A'B'B' + A'BB + AB'B)] = \\ &= [B \leftrightarrow A \leftrightarrow (A'B' + A'B + 0)] = [B \leftrightarrow A \leftrightarrow A'(B' + B)] = \\ &= [B \leftrightarrow A \leftrightarrow A'] = [B \leftrightarrow 0] = B'. \end{aligned}$$

Raymond M. Smullyan – współczesny logik amerykański. Główne swoje wyniki osiągnął w teorii rekursji i samoreferencji. Napisał także wiele książeczek dla dzieci i młodzieży popularyzujących logikę i teorię mnogości. Kilka z nich zostało przetłumaczonych na polski: *Dama i tygrys*, *Jak się nazywa ta książka*. W młodości zarabiał na życie jako iluzjonista.

Można tu powiedzieć jedynie to, że B jest łotrem, a co za tym idzie, C jest rycerzem. O A nie wiadomo nic! ■

Zagadki Smullyana nie kończą się na rycerzach i łotrach. Na innej ze swoich wysp Smullyan dopuszcza jeszcze tzw. zwykłych ludzi. Ci czasem mówią prawdę, a czasem kłamią.

Jesteś mieszkańcem wyspy, o której mowa, i jesteś podejrzany o popełnienie przestępstwa. Wiadomo, że winowajcą jest łotr. Ty łotrem nie jesteś. Jakie zdanie powinieneś w sądzie wygłosić, aby uznano Cię za niewinnego?

Tutaj jedyne, co możemy stwierdzić, to:

$$X \lhd \alpha \to (\mathrm{T}_X \to \alpha)(\mathrm{F}_X \to \alpha')$$

oraz

$$\mathrm{T}'_X + \mathrm{F}'_X,$$

dla dowolnego mieszkańca X tej wyspy.

Rozwiązanie. Powiedzmy, że nazywasz się A. Szukamy takiego zdania α, dla którego:

$$A \lhd \alpha \to \mathrm{G}(A)',$$

gdzie $\mathrm{G}(X)$ oznacza, że X jest winny. Ponieważ $A \lhd \alpha$ implikuje $\mathrm{T}'_A + \alpha$ i $\mathrm{F}'_A + \alpha'$, a wiadomo, że $\mathrm{F}_A + \mathrm{G}(A)'$, to w myśl tzw. reguły rezolucji widzimy, że $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{G}(A)$ da żądany wynik. Ot, przewrotność czasem popłaca! ■

Korzystamy tutaj ze związku

$$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow \alpha' + \beta.$$

Reguła rezolucji mówi, że wiedząc, iż $\alpha + \delta$ i $\alpha' + \beta$ są prawdziwe, wiemy, że $\delta + \beta$ jest również prawdziwe.

Innym razem znajdujemy się w Transylwanii – ojczyźnie słynnego Drakuli. Ziemię tę zamieszkują dwa rodzaje istot – ludzie, którzy zawsze mówią to, czego prawdziwości są pewni, oraz wampiry, czasem zwane upiorami – istoty przewrotne, mówiące rzeczy, o których fałszywości są przekonane. Żeby uniknąć analogii z wyspą rycerzy i łotrów, niektórzy mieszkańcy Transylwanii są obłąkani – ich przekonania są dokładnie przeciwne do faktycznego stanu rzeczy. Tak też obłąkany człowiek wypowiada zdania fałszywe, dokładnie jak zdrowy na umyśle wampir. Obłąkany wampir zaś wypowiada zdania prawdziwe – dokładnie jak zdrowy na umyśle człowiek. Spróbujmy rozwiązać zagadkę:

DrAK – to autor tego artykułu.

Oto raport z przesłuchania dwójki znanych transylwańskich opryszków:
A) B jest całkowicie normalny.
B) A jest kompletnym wariatem.
A) B jest upiorem.
B) A jest człowiekiem.
Co można powiedzieć o A i B?

Niech $X(\alpha)$ oznacza, że X jest przekonany o prawdziwości α oraz niech S_X oznacza, że X jest zdrowy na umyśle. Niech ponadto H_X oznacza, że X jest człowiekiem. Wówczas:

$$X \lhd \alpha \stackrel{\text{def}}{=} [\mathrm{H}_X \leftrightarrow X(\alpha)]$$

oraz

$$X(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathrm{S}_X \alpha + \mathrm{S}'_X \alpha'].$$

Ostatni warunek zapisujemy jako

$$X(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathrm{S}_X \leftrightarrow \alpha],$$

dla dowolnego mieszkańca wyspy X. Zamiast H_X możemy pisać po prostu X.

Rozwiązanie. Mamy:

$$A \leftrightarrow A(\mathrm{S}_B), \quad B \leftrightarrow B(\mathrm{S}'_A), \quad A \leftrightarrow A(\mathrm{H}'_B), \quad B \leftrightarrow B(\mathrm{H}_A).$$

Tzn.

$$(1) \quad A \leftrightarrow \mathrm{S}_A \leftrightarrow \mathrm{S}_B, \qquad (3) \quad B \leftrightarrow \mathrm{S}_B \leftrightarrow \mathrm{S}'_A,$$
$$(2) \quad A \leftrightarrow \mathrm{S}_A \leftrightarrow B', \qquad (4) \quad B \leftrightarrow \mathrm{S}_B \leftrightarrow A.$$

Wówczas z (1) i (2) mamy $\mathrm{S}_B \leftrightarrow B'$, a co za tym idzie z (3) i (4) dostajemy S_A i A'. Dalej, ponownie z (1) i (2) $A \leftrightarrow \mathrm{S}_B$ i $A \leftrightarrow B'$, skąd S'_B i B.

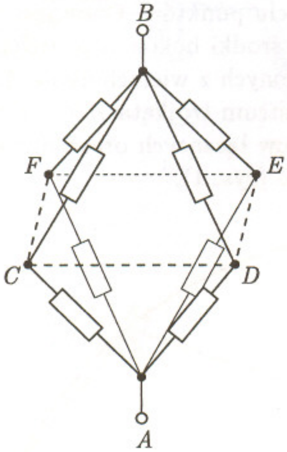
$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta, \quad \alpha \leftrightarrow \delta}{\beta \leftrightarrow \delta}$$

i

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta, \quad \alpha' \leftrightarrow \delta}{\beta \leftrightarrow \delta'}$$

Tym samym A jest zdrowym wampirem, a B pomylonym człowiekiem! ■

Rozwiązanie zadania F 496.
Potencjały punktów C, D, E, F są równe, dlatego przez oporniki leżące między nimi nie płynie prąd, i nie wpływają one na oporność układu. Możemy więc przerysować nasz schemat tak jak na rysunku poniżej. Oznaczając przez r opór pojedynczego opornika, a przez R opór całego układu, znajdujemy, że $\frac{1}{R} = 4\frac{1}{2r}$, a więc $R = \frac{r}{2}$.



Nieco bardziej skomplikowanie wygląda zagadka następująca:

Połowa mieszkańców pewnej wyspy w pobliżu Haiti została za pomocą magicznych praktyk Voodoo zamieniona w Zombich. Podobnie jak Rycerze i Łotry, zwykli mieszkańcy tej wyspy mówią szczerą prawdę, Zombi zaś notorycznie kłamią. Uroku całej sytuacji dodaje fakt, że mieszkańcom tej wyspy, doskonale rozumiejącym nasz język, tabu zabrania odpowiadania na pytania inaczej niż: *Bal* albo *Da*. Nie wiadomo jednak, które z tych słów oznacza *Tak*, a które *Nie*.
Jakie pytanie należy zadać mieszkańcowi tej wyspy, aby dowiedzieć się, co znaczy *Bal*?

Niech $\mathfrak{B}(\alpha)$ oznacza, że prawidłową odpowiedzią na to, czy zachodzi α, jest Bal i niech $\mathfrak{B}$ oznacza, że Bal znaczy Tak. Niech ponadto $X \lhd_{\mathfrak{B}} \alpha$ oznacza, że X na pytanie o α odpowiada słowem Bal. Mamy wówczas:

$$X \lhd_{\mathfrak{B}} \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{T}_X \leftrightarrow \mathfrak{B}(\alpha), \qquad \mathfrak{B}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \leftrightarrow \mathfrak{B}),$$

gdzie T_X oznacza, że X jest prawdomówny (czyli w tym przypadku jest człowiekiem).

Rozwiązanie. Celem zadania jest znalezienie takiego α, żeby

$$(\star) \qquad X \lhd_{\mathfrak{B}} \alpha \leftrightarrow \mathfrak{B}.$$

Wówczas to, co X odpowie na pytanie o α, oznaczać będzie *Tak*.
W rzeczy samej. Jeśli X odpowie *Bal*, to prawdziwa będzie lewa strona równoważności $(\star)$, a co za tym idzie, prawdziwa będzie jego strona prawa, tzn. *Bal*, czyli to, co X odpowiedział, oznaczać będzie *Tak*. Jeśli X odpowie *Da*, to lewa, a i w konsekwencji i prawa strona $(\star)$ będzie fałszywa, skąd wynika, że *Bal* oznacza *Nie*. Tym samym *Da*, czyli to, co X odpowiedział, znaczy *Tak*. Tak więc cokolwiek X odpowie, oznaczać to będzie *Tak*. Przystąpmy do „wyliczenia” α. W myśl poprzednich ustaleń mamy:

$$[X \lhd_{\mathfrak{B}} \alpha \leftrightarrow \mathfrak{B}] = [\mathrm{T}_X \leftrightarrow \mathfrak{B}(\alpha) \leftrightarrow \mathfrak{B}] = [\mathrm{T}_X \leftrightarrow \mathfrak{B} \leftrightarrow \alpha \leftrightarrow \mathfrak{B}] = [\alpha \leftrightarrow \mathrm{T}_X].$$

Przyjmując zatem $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{T}_X$, widzimy, że warunek $(\star)$ jest spełniony. Należy zatem zapytać napotkaną osobę, czy jest człowiekiem. Odpowiedź, jakiej udzieli, oznaczać będzie *Tak*. ∎

Do samodzielnego rozwiązania proponujemy następującą zagadkę:

Goszcząc swego czasu w Transylwanii, zostałem zaproszony do zamku Drakuli. Okazuje się jednak, że bywalcy tego miejsca mają w zwyczaju odpowiadać na wszelkie pytania używając słów *Bal* oraz *Da* – dokładnie tak, jak na wyspie Zombich. Przypomnieć warto, że mieszkańcy Transylwanii dzielą się na wampiry i ludzi, przy czym każdy z nich może być obłąkany i żywić nieprawdziwe przekonania. Jak za pomocą jednego pytania dowiedzieć się, czy napotkana osoba jest wampirem?

Rozwiązanie podano na dole strony. Aby je odczytać, przystaw prostokątne lusterko do poziomej linii prostopadle do powierzchni papieru.

Rozwiązanie. Mamy:

$$X \lhd_{\mathfrak{B}} \alpha \stackrel{\text{def}}{=} [X(\mathfrak{B}(\alpha)) \leftrightarrow \mathrm{H}_X], \qquad X(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathrm{S}_X \leftrightarrow \beta].$$

Szukamy takiego α, dla którego:

$$(X \lhd_{\mathfrak{B}} \alpha) \leftrightarrow \mathrm{H}'_X.$$

W rzeczy samej, jeśli X zapytany o α odpowie *Bal*, to prawdą będzie H'_X, tzn. X będzie wampirem. Jeśli odpowie *Da*, to H'_X będzie fałszywe, tzn. X będzie człowiekiem. Wyliczmy zatem α. Mamy

$$[(X \lhd_{\mathfrak{B}} \alpha) \leftrightarrow \mathrm{H}'_X] = [X(\mathfrak{B}(\alpha)) \leftrightarrow \mathrm{H}_X \leftrightarrow \mathrm{H}'_X] = X(\mathfrak{B}(\alpha))' =$$
$$= [\mathrm{S}_X \leftrightarrow \mathfrak{B}(\alpha)]' = [\mathrm{S}_X \leftrightarrow \mathfrak{B} \leftrightarrow \alpha]' =$$
$$= [\alpha \leftrightarrow \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathrm{S}'_X] = [\alpha \leftrightarrow \mathfrak{B}(\mathrm{S}'_X)].$$

Należy zapytać: »Czy na pytanie, czy jesteś wariatem, właściwą odpowiedzią jest *Bal*?«