Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 1999

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Zadania z matematyki nr 377, 378

Redaguje Marcin E. KUCZMA

377. Rozważamy wielomian $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ zmiennej zespolonej z, o współczynnikach zespolonych. Dowieść, że jeżeli wszystkie pierwiastki wielomianu $P(z)$ są liczbami zespolonymi o module 1, to również wszystkie pierwiastki wielomianu $Q(z) = z^3 + |a|z^2 + |b|z + |c|$ są liczbami zespolonymi o module 1.

378. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej k istnieją dwie kolejne liczby naturalne, z których każda ma co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

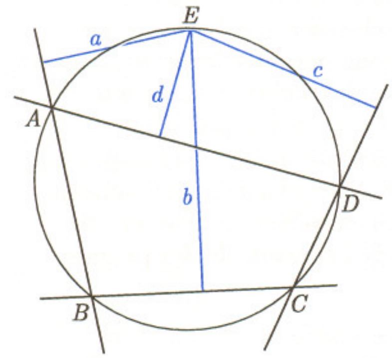
Zadanie 378 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1998

Przypominamy treść zadań:

369. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg. Odległości punktu E od prostych AB, BC, CD, DA są odpowiednio równe a, b, c, d. Wyrazić d przez a, b, c.

370. Dane są liczby naturalne $n \geq k \geq 1$. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ losujemy ze zwracaniem k liczb. Obliczyć wartość oczekiwaną iloczynu tych liczb pod warunkiem, że ich suma jest równa n.



369. Oznaczmy promień okręgu przez R. Pole trójkąta ABE wyraża się wzorami:

$$S_{ABE} = \frac{|AB| \cdot |AE| \cdot |BE|}{4R} \qquad \text{oraz} \qquad S_{ABE} = \frac{|AB| \cdot a}{2}.$$

Stąd wynika pierwsza z napisanych niżej równości; a pozostałe otrzymujemy przez cykliczne przesunięcie oznaczeń:

$$a = \frac{|AE| \cdot |BE|}{2R}, \quad b = \frac{|BE| \cdot |CE|}{2R}, \quad c = \frac{|CE| \cdot |DE|}{2R}, \quad d = \frac{|DE| \cdot |AE|}{2R}.$$

Zatem $2Ra \cdot 2Rc = 2Rb \cdot 2Rd$ ($= |AE| \cdot |BE| \cdot |CE| \cdot |DE|$) i mamy odpowiedź: $d = ac/b$.

(Zauważmy, że A, B, C, D, E mogą być dowolnymi pięcioma punktami na okręgu, niekoniecznie kolejnymi wierzchołkami pięciokąta.)

370. Zdarzenia elementarne w rozważanym problemie warunkowym – to ciągi $(x_1, \ldots, x_k)$ o wyrazach całkowitych nieujemnych, o sumie równej n. Każdy taki ciąg kodujemy w postaci ciągu zerojedynkowego utworzonego z k bloków złożonych z zer; kolejne bloki mają długości $x_1, \ldots, x_k$; między blokami zer umieszczamy jedynki – powstały ciąg ma więc długość $n+k-1$. (Oto przykład: dla $n = 8$, $k = 4$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$, kod ma postać: 00010100100.)

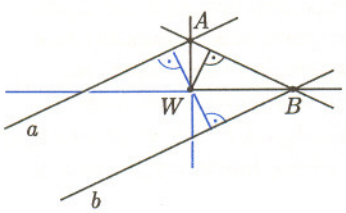
Jedynki, których jest $k-1$, są dowolnie rozmieszczone na $n-1$ pozycjach rozdzielających zera; liczba takich rozmieszczeń jest równa $\binom{n-1}{k-1}$, a prawdopodobieństwo pojedynczego zdarzenia elementarnego jest odwrotnością tej liczby.

W każdym bloku złożonym z zer zastąpmy teraz jedno zero, dowolnie wybrane, jedynką – liczba możliwości jest równa iloczynowi $x_1 x_2 \ldots x_k$. (Oto jeden z możliwych rezultatów takiej operacji dla ciągu z poprzedniego przykładu: $010\underline{1}1\underline{1}10\underline{1}01$; podkreślone są „stare" jedynki.)

W otrzymanym ciągu zerojedynkowym długości $n+k-1$ jest $2k-1$ jedynek, przy czym mogą się one znaleźć na zupełnie dowolnych pozycjach. Na odwrót, mając dany ciąg takiej postaci, możemy jednoznacznie odtworzyć ciąg liczb $x_1, \ldots, x_k$: podział na bloki o tych właśnie długościach wyznaczają jedynki: druga, czwarta, szósta, itd. („stare" jedynki).

Dla ustalonego zdarzenia elementarnego (czyli ustalonych pozycji „starych" jedynek), iloczyn $x_1 x_2 \ldots x_k$ jest liczbą możliwych rozmieszczeń „nowych" jedynek. Suma takich iloczynów dla wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa po prostu liczbie rozmieszczeń $2k-1$ jedynek w ciągu zerojedynkowym długości $n+k-1$ i wynosi $\binom{n+k-1}{2k-1}$. Mnożąc ją przez prawdopodobieństwo zdarzenia elementarnego, otrzymamy szukaną wartość oczekiwaną E iloczynu $x_1 x_2 \ldots x_k$. Wynik: $E = \binom{n+k-1}{2k-1}\binom{n-1}{k-1}^{-1} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n+j}{k+j}$.

Rozwiązanie zadania M 876.
Rysując proste zawierające ramiona kąta, stwierdzamy z przystawania powstałych trójkątów, że rozważana odległość jest połową odległości a i b.



Zadania z fizyki nr 274, 275

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 1999

274. Stała słoneczna, czyli moc promieniowania słonecznego na jednostkę powierzchni prostopadłej, jest w okolicach Ziemi równa $I = 1{,}35\ \mathrm{kW/m^2}$. W próżni kosmicznej umieszczono prostopadle do promieni słonecznych czarną płytę z materiału izolacyjnego o współczynniku przewodnictwa cieplnego równym $\lambda = 0{,}3\ \mathrm{W/(m\cdot K)}$ i grubości $d = 10$ cm (pozostałe rozmiary są znacznie większe). Obliczyć numerycznie temperaturę, jaką po dłuższym czasie osiągnie każda ze stron płyty. Stała Stefana–Boltzmanna wynosi $\sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2K^4)}$.

275. Załóżmy, że siła elektromotoryczna termopary zbudowanej z przewodników A i B jest proporcjonalna do różnicy temperatur styków (jest to słuszne dla niedużych wartości tej różnicy):

$$\mathcal{E}_{AB} = \alpha_{AB}(T_1 - T_2).$$

Stałą α_{AB} nazywamy *zdolnością termoelektryczną* danej pary przewodników. Stałej tej przypiszemy znak dodatni wtedy, gdy w styku gorącym prąd płynie od przewodnika A do B, a ujemny wtedy, gdy zwrot prądu jest przeciwny (tak więc $\alpha_{AB} = -\alpha_{BA}$).
1. Udowodnić, że $\alpha_{AB} + \alpha_{BC} = \alpha_{AC}$.
2. W obwodzie składającym się z trzech przewodników A, B i C temperatura styku AB jest równa T_1, temperatura styku BC jest równa T_2, a temperatura styku AC jest równa T_3. Wyznaczyć siłę elektromotoryczną takiej „termotrójki".

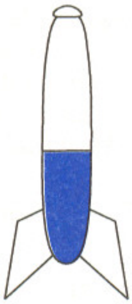
Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 262 (WT=2,20) i 263 (WT=2,14) z numeru 9/1998

Jarosław Łazuka	– Warszawa	38,58
Marek Wójcicki	– Szczecin	34,97
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	26,51
Tomasz Wietecha	– Tarnów	26,49
Aleksander Surma	– Myszków	16,32
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	14,49

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1998

Przypominamy treść zadań:

266. Rakieta-zabawka zawiera komorę, do której nalewa się wody, pozostawiając w części komory powietrze, a następnie dopompowuje się powietrze do odpowiednio wysokiego ciśnienia. Po ustawieniu rakiety pionowo (rys.) odłącza się pompkę, a sprężone powietrze wyrzuca wodę, zapewniając rakiecie napęd. Obliczyć numerycznie maksymalną wysokość możliwą do osiągnięcia przez rakietę, jeśli dane są: masa samej rakiety 200 g, objętość komory 400 cm^3 i maksymalne ciśnienie (nadwyżka nad ciśnieniem atmosferycznym) 0,5 MPa. Przyjąć wartość ciśnienia atmosferycznego równą 0,1 MPa. Co można powiedzieć o optymalnej wielkości otworu wylotowego? Jaką ilość wody należy nalać do komory, aby osiągnąć maksymalną wysokość?



267. Gdy samochód uderzył w nieruchomą ścianę, pasy bezpieczeństwa napięły się siłą F. Ocenić orientacyjnie, jaką siłą napną się pasy w tym samochodzie, jeśli jadąc z tą samą prędkością uderzy on w taki sam samochód: a) stojący nieruchomo, b) jadący naprzeciw z tą samą prędkością.

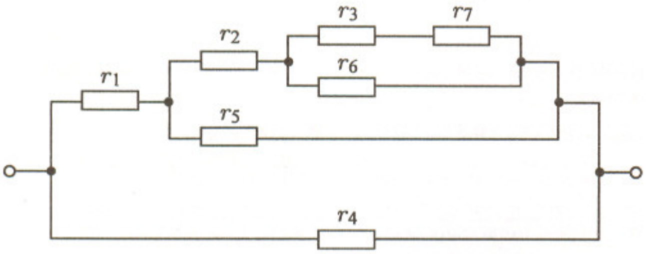
266. Przy pominięciu siły oporu powietrza równanie ruchu rakiety z działającym silnikiem ma postać

$$U\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = M\mathrm{g} + Ma\,,$$

gdzie $U = \sqrt{2(p - p_{\mathrm{atm}})/\rho}$ jest prędkością wylotu wody względem rakiety, $\mathrm{d}m$ jest masą wody wyrzuconej w ciągu czasu $\mathrm{d}t$, a M jest zmienną masą rakiety. Oznaczmy przez $v_0(t)$ całkę $\int_0^t U\frac{\mathrm{d}m}{M}$ (jest to prędkość, którą osiągnęłaby rakieta po czasie t, gdyby można było pominąć siłę ciężkości). Zauważmy, że chociaż czas działania silnika zależy od wielkości otworu wylotowego, to końcowa wartość v_0 (w chwili ustania pracy silnika i później; oznaczmy tę wartość przez v_1) od niego nie zależy. Przy uwzględnieniu grawitacji prędkość rakiety w chwili t wynosi $v(t) = v_0(t) - \mathrm{g}t$, a osiągnięta wysokość $h = \int v(t')\mathrm{d}t' = \int v_0(t')\mathrm{d}t' - \frac{1}{2}\mathrm{g}t^2$. Widzimy, że maksymalną wysokość rakieta osiągnie wtedy, gdy funkcja $v_0(t)$ osiągnie swoją maksymalną wartość v_1 w jak najkrótszym czasie, tzn. gdy otwór dyszy jest jak największy. Wtedy $h = v_1t - \frac{1}{2}\mathrm{g}t^2$, a maksymalna wysokość rakiety wyniesie $v_1^2/2\mathrm{g}$.

Obliczenie całki v_1 autor zadania przeprowadził numerycznie. Jeśli założymy, że rozprężenie powietrza zachodzi adiabatycznie (według wzoru $pV^{1,4} = \mathrm{const}$), to dla podanych wartości masy rakiety, ciśnienia początkowego i objętości komory otrzymuje się, że maksymalne v_1, równe 15,0 m/s, występuje wtedy, gdy na początku napełnimy 51% komory (204 cm^3) wodą. Rakieta osiągnie wysokość 11,5 m.

267. W przypadku b) ze względu na symetrię zderzenie przebiega tak samo, jak zderzenie z nieruchomą ścianą. W przypadku a) analizę najwygodniej jest przeprowadzić w układzie środka masy, w którym oba samochody jadą naprzeciw siebie z prędkością dwukrotnie mniejszą. Jeśli założymy, że siła hamująca jest proporcjonalna do „ugięcia sprężyny" (wgniecenia karoserii), to ruch samochodów jest harmoniczny, a dwukrotne zmniejszenie prędkości początkowej oznacza dwukrotne zmniejszenie amplitudy i maksymalnej wartości siły.



Rozwiązanie zadania F 495.
Dany układ wygodniej jest przedstawić tak, jak na rysunku obok. Opór zastępczy oporników r_3 i r_7, połączonych równolegle z r_6, wynosi $R_1 = \dfrac{r_6(r_3 + r_7)}{r_6 + r_3 + r_7} = 1\ \Omega$, a opór układu oporników r_2 i R_1, połączonych równolegle z r_5, wynosi $R_2 = \dfrac{r_5(r_2 + R_1)}{r_5 + r_2 + r_1} = 1\ \Omega$. Stąd całkowity opór układu wynosi $R = \dfrac{r_4(r_1 + R_2)}{r_4 + r_1 + R_2} = 1\ \Omega$.