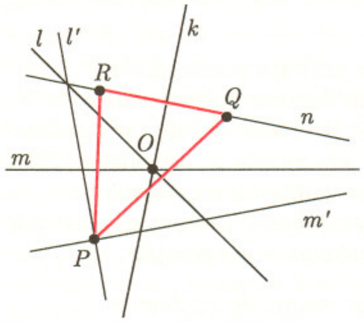
Zadania prawie identyczne i prawie rozwiązane

Symetralna odcinka to jego oś symetrii, podobnie jak dwusieczna jest osią symetrii kąta. Proponuję kilka zadań o nich.

Zadanie ♣. *Na płaszczyźnie dane są trzy proste k, l, m przechodzące przez punkt O. Znaleźć trójkąt, dla którego proste te są symetralnymi boków.*

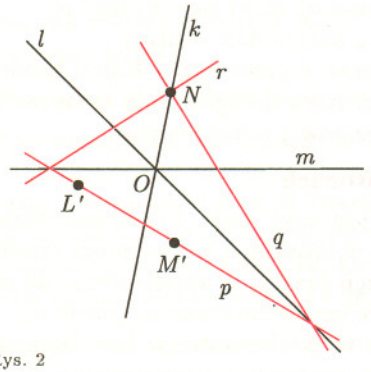


Rys. 1

Jeden ze sposobów na rozwiązanie zadania ♣ jest taki. Rysujemy prostą n prostopadłą do k i odbijamy ją symetrycznie względem l (otrzymując prostą l') i względem m (otrzymując prostą m'). Następnie punkt P, będący punktem wspólnym l' i m', odbijamy symetrycznie względem l i m, otrzymując odpowiednio punkty Q i R (oczywiście na prostej n – rys. 1). Trójkąt PQR, jak też każdy jednokładny z nim względem środka O, stanowi rozwiązanie zadania.

Dlaczego? – przyjemność uzasadnienia pozostawiamy Czytelnikowi, a sami rozwiązujemy następne

Zadanie ♠. *Na płaszczyźnie dane są trzy proste k, l, m przechodzące przez punkt O. Znaleźć trójkąt, dla którego proste te są dwusiecznymi kątów.*

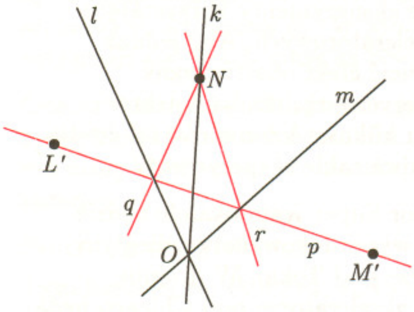


Rys. 2

Jeden ze sposobów na rozwiązanie zadania ♠ jest taki. Obieramy punkt N na prostej k i odbijamy go symetrycznie względem l (otrzymując punkt L') i względem m (otrzymując punkt M'). Następnie prostą p, łączącą L' i M', odbijamy symetrycznie względem l i m, otrzymując odpowiednio proste q i r (oczywiście przechodzące przez N – rys. 2). Trójkąt wyznaczony przez p, q, r, jak też każdy jednokładny z nim względem środka O, stanowi rozwiązanie zadania.

Dlaczego? – podobnie jak poprzednio, przyjemność uzasadnienia pozostawiam Czytelnikowi.

A teraz satysfakcja dla Czytelnika Leniwego, tym większa i bardziej złośliwa, im więcej jego koleżanek i kolegów znalazło te uzasadnienia. Spójrzmy na rysunek 3, na którym przećwiczyliśmy jeszcze raz rozwiązania zadania ♠. Najwyraźniej k, l, m nie są tutaj dwusiecznymi kątów otrzymanego trójkąta. Cóż więc ze znalezionymi uzasadnieniami? Trudno mi ręczyć za przyjaciół Leniwego, ale najprawdopodobniej znalezione przez nich uzasadnienia były poprawne. Przeoczony był tylko, ale nie przez nich, lecz przeze mnie, pewien szczegół.



Rys. 3

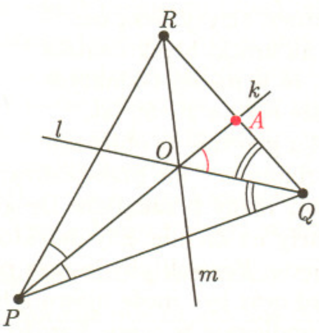
Otóż, o ile każde trzy przecinające się w jednym punkcie proste mogą być symetralnymi boków pewnego trójkąta, to nie zawsze mogą być dwusiecznymi. Mianowicie zachodzi

Twierdzenie ⋆. *Wszystkie kąty, na które dzielą płaszczyznę dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta, są ostre.*

Oto uzasadnienie. Niech k, l i m będą dwusiecznymi kątów wewnętrznych trójkąta PQR (dalsze oznaczenia jak na rys. 4). Gdyby kąt QOA miał co najmniej 90°, to mielibyśmy

$$\angle RPQ + \angle RQP = 2\angle OPQ + 2\angle OQP = 2\angle QOA \geq 180°,$$

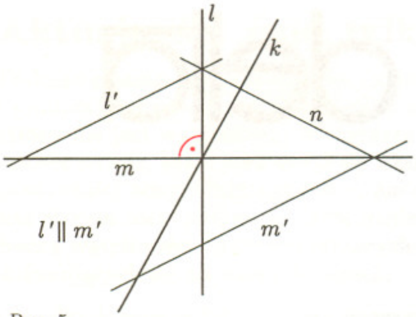
co kątom w trójkącie się nie zdarza. Przypuszczenie nasze było więc fałszywe, co kończy dowód.



Rys. 4

Co zatem skonstruowaliśmy na rysunku 3? Został tam znaleziony trójkąt, w którym jedna z danych prostych jest dwusieczną kąta wewnętrznego, a pozostałe dwie – dwusiecznymi kątów zewnętrznych. Jeżeli w podawanych poprzednio uzasadnieniach wykorzystywano tylko fakt, że dwusieczna jest osią symetrii prostych, w których są zawarte boki trójkąta, to uzasadnienie to pasuje i tutaj.

No to sprawdźmy jeszcze raz, tym razem rozwiązanie ♣ na rysunku 5. Co się okazuje? – nie ma punktu P. Ale rozwiązanie jest. Można je znaleźć albo zaczynając od innej osi niż k, albo prostą n prowadząc przez O. Proponuję



Rys. 5

zapędzić Leniwego do wyjaśnienia powstałej sytuacji. Podpowiedzmy, że sytuacja ta dotyczy trójkąta prostokątnego.

A co będzie, gdy sprawdzimy znów rozwiązanie ♠, dla danych z rysunku 5? Tym razem nic nam z tego nie wyjdzie – dlaczego? Bo nigdy dwie dwusieczne – wszystko jedno, czy wewnętrznych, czy zewnętrznych kątów – przy różnych wierzchołkach trójkąta nie bywają prostopadłe.

Jak widać, zadania, mające praktycznie identyczne rozwiązania w sytuacji ogólnej, mogą się diametralnie różnić w szczególnych przypadkach.

Marek KORDOS

Suma pewnego szeregu

Richard Suisseth – uczony z Merton College w Oksfordzie – autor dzieła *Liber calculationum* powstałego w drugiej ćwierci XIV wieku. Nazywany był Calculatorem – lub jednym z Calculatorów – z uwagi na osobliwe obliczenia na szeregach nieskończonych, przedstawianych zazwyczaj jako pola figur nieograniczonych. Kinematyczne motywacje tych obliczeń przeszły wraz z terminologią fluent i fluksji do analizy Newtona, która w elementarnych partiach do dzisiaj nosi w języku angielskim nazwę Calculus.

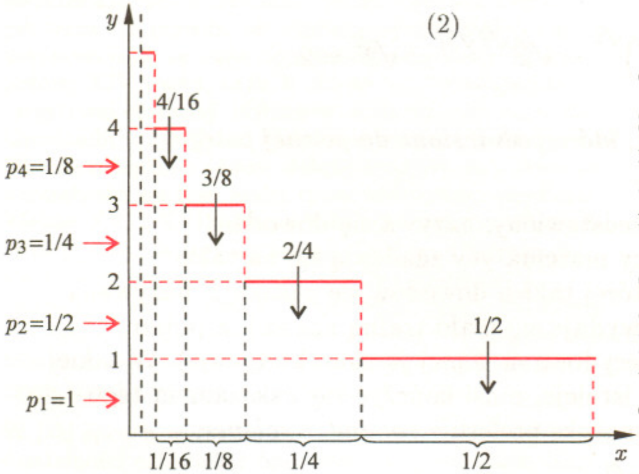
W *Historii rachunku różniczkowego i całkowego i rozwoju jego pojęć* (1949; wyd. polskie 1964) Carl Boyer pokazuje (str. 116–118), w jaki sposób żyjący w XIV wieku Suisseth, nazywany Calculatorem, obliczał sumę szeregu

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots \tag{1}$$

To obliczenie nie sprawi kłopotu Czytelnikowi, który bez trudu obliczy sumy częściowe szeregu i przejdzie do granicy; pokażemy to później. Ale Suisseth liczył inaczej. Nie wchodząc w motywacje kinematyczne jego rachunku, ograniczymy się do uwagi, że szereg (1) interesował go jako pole figury schodkowej na rysunku poniżej.

Liczył w tym celu pola p_n prostokątów wyciętych z tej figury pasami $n-1 \le y \le n$, otrzymując szereg

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots \tag{2}$$



o oczywistej sumie równej 2.

Sumy częściowe $P_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ tego szeregu są niczym innym niż polami pod wykresami funkcji prostych aproksymujących całkę Lebesgue'a, wyrażającą liczbowo pole figury.

* * *

Obliczając sumę szeregu (1) jako granicę jego sum częściowych, liczymy to samo pole jako całkę (niewłaściwą) Riemanna. Sumy częściowe $S_n = 1/2 + \cdots + n/2^n$ szeregu (1) wyrażają się wzorem $S_n = 2 - (n+2)/2^n$. Wymaga to odgadnięcia wzoru i przeprowadzenia dowodu przez indukcję:

$$S_1 = 2 - \frac{1+2}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2(n+2)-(n+1)}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}.$$

Ponieważ ciąg $(n+2)/2^n$ jest zbieżny do zera, otrzymaliśmy więc i tą drogą liczbę 2 jako pole (tej samej) figury.

Całka Lebesgue'a okazała tu jednak swoją wyższość nad całką Riemanna, prowadząc szybciej do celu.

Jak pisze Łuzin – odnośnik do artykułu „Sowremiennoje sostojanije tieorii funkcij diejstwitielnogo pieriemiennogo" na str. 525 tomu 2 *Dzieł Zebranych* – podział osi rzędnych był używany przez inżynierów do całkowania funkcji – jeśli te miały wykres zbyt falisty na to, by sposób Cauchy'ego był praktycznie opłacalny – jeszcze przed pojawieniem się prac Lebesgue'a. Stąd, próby kwestionowania priorytetu Lebesgue'a. A więc nie tylko czternastowieczny Suisseth!

Nie wyciągajmy stąd jednak wniosku, że Suisseth był prekursorem Lebesgue'a. Było mu po prostu wszystko jedno, jakim sposobem liczyć pola. Nasz drugi sposób mógł być zresztą na tamte czasy za trudny.

* * *

Ponieważ nam nie jest wszystko jedno, zauważmy, że sumy S_n nie przekraczają co do wielkości sum P_n. Konsekwencją rachunku Lebesgue'owskiego jest zatem $\lim S_k \le 2$. Ale łatwo uzyskujemy równość, wobec $\lim S_k \ge P_n$ dla każdego n.

Liczenie „trudnej" sumy Riemannowskiej jest więc niepotrzebne.

Jerzy MIODUSZEWSKI