mała delta

Tajemnicza liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

Czy to liczba wymierna, czy nie? Nie widać prostego sposobu, aby się o tym przekonać. A może prawdziwe jest twierdzenie, że

($\star$) *liczba niewymierna podniesiona do niewymiernej potęgi jest liczbą niewymierną*

(które to twierdzenie sprawę by załatwiało)?

Okazuje się, że nie. I w odkryciu tego pomoże nam tytułowa liczba, mimo że nie wiemy, jak z nią jest. Gdyby bowiem była sama liczbą wymierną, to od razu obalałaby zdanie ($\star$), bo $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Gdyby jednak okazała się liczbą niewymierną, to przykład obalający ($\star$) uzyskalibyśmy, podnosząc ją do potęgi o wykładniku $\sqrt{2}$. Rzeczywiście, ponieważ

$$\left(a^b\right)^c = a^{(b\cdot c)},$$

więc

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

Liczba wymierna to taka, którą można przedstawić jako iloraz liczb całkowitych; gdy nie można – liczba jest niewymierna.

To, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, można uzasadnić tak. Gdyby bowiem dla pewnych liczb całkowitych k i m było $\sqrt{2} = \frac{k}{m}$ (możemy założyć, że ułamek ten jest nieskracalny, bo w przeciwnym razie najpierw go skrócimy), to byłoby $2m^2 = k^2$, skąd wynika, że k jest parzyste, czyli $k = 2n$ dla pewnego całkowitego n. Mielibyśmy wobec tego $2m^2 = 4n^2$, czyli $m^2 = 2n^2$, co oznacza, że m też jest parzyste, wbrew założonej nieskracalności ułamka $\frac{k}{m}$.

Udowodniliśmy zatem, że

istnieją liczby niewymierne, które podniesione do pewnej potęgi niewymiernej są wymierne.

Taki dowód, jaki został przedstawiony, nazywa się dowodem nieefektywnym. Nie wszyscy matematycy zgadzają się na takie dowody. Matematyka, w której takich dowodów się zakazuje, nazywana była *intuicjonistyczną* (co wydaje się mało trafną nazwą), a potem *konstruktywistyczną* (co zdecydowanie lepiej ją charakteryzuje). W takiej matematyce dowód, że coś istnieje, musi kończyć się wskazaniem tego czegoś. Taką właśnie matematykę preferuje *computer science*.

Jak jednak jest z liczbą $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$? Odpowiedź na to pytanie została uzyskana przy okazji rozwiązywania problemu ogólniejszego. Pytano o liczby *przestępne*, czyli takie, które nie są pierwiastkami żadnego wielomianu o współczynnikach wymiernych (te, które są pierwiastkami jakiegoś takiego wielomianu, to liczby *algebraiczne*). Pytanie o warunek wystarczający, by a^b było liczbą przestępną, gdy a i b są algebraiczne, postawione zostało jeszcze w XVIII wieku. Odpowiedź na nie została uzyskana dopiero w latach trzydziestych naszego stulecia i brzmi ona tak: *jeśli liczby a i b są obie algebraiczne, liczba b zaś jest dodatkowo niewymierna, to liczba a^b jest przestępna.*

Liczba przestępna jest, oczywiście, niewymierna – każda liczba wymierna $\frac{p}{q}$ (gdzie p i q są całkowite) jest pierwiastkiem wielomianu stopnia 1, a mianowicie $x - \frac{p}{q}$. Liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą algebraiczną, jako pierwiastek wielomianu $x^2 - 2$, a zatem tytułowa liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną, bo przestępną.

Małą Deltę opracował Marek KORDOS

Rozwiązanie zadania F 493.
W chwili oderwania lejka całkowita siła działająca na lejek, będąca sumą siły ciężkości działającej na lejek mg i na wodę w lejku ρgV, równa jest sile parcia słupa o wysokości h na powierzchnię S:

$$mg + \rho gV = \rho ghS,$$

gdzie ρ jest gęstością wody, a V objętością wody zawartej w lejku i rurce. Jeśli rurka jest bardzo cienka, to możemy zaniedbać objętość wody w rurce w porównaniu z objętością wody w lejku. Wtedy $V = \frac{1}{3}HS$ i z poprzedniego równania dostajemy:

$$m = \rho S\left(h - \frac{1}{3}H\right).$$