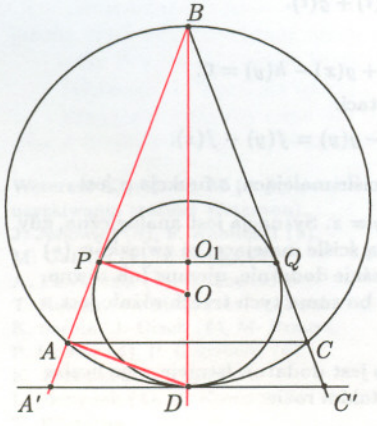
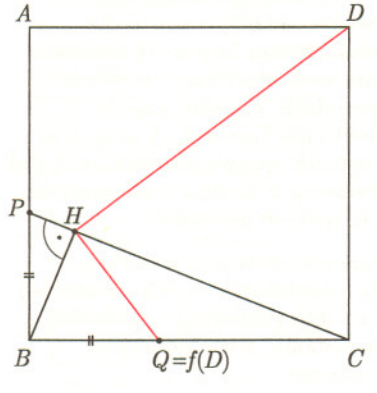
Klub 44

Regulamin

Rozwiązanie zadania M 872.
Niech J będzie jednokładnością o środku B, która przeprowadza odcinek AC na odcinek $A'C'$ styczny do okręgu K w punkcie D. Niech O_1 będzie środkiem $\overline{PQ}$, a O – środkiem okręgu S. Ponieważ S jest wpisany w trójkąt $A'BC'$ oraz $J(\triangle ABC) = \triangle A'BC'$, więc wystarczy dowieść, że J przeprowadza O_1 na O, czyli że $|BO_1|/|BO| = |BA|/|BA'|$. Trójkąty prostokątne BPO i BDA' są podobne, a O_1 i A są spodkami wysokości opuszczonych na ich przeciwprostokątne. Zatem dzielą one owe przeciwprostokątne w tym samym stosunku. Stąd już wynika żądana równość.



Rozwiązanie zadania M 873.
Niech f będzie złożeniem obrotu o 90° wokół H (półprosta HB przechodzi w półprostą HP) i jednokładności o środku H i skali $|PB|/|BC|$. Wówczas f przeprowadza $\triangle BHC$ na $\triangle PHB$. Ponieważ wierzchołki kwadratu przechodzą przy f na wierzchołki kwadratu, a $|BP| = |BQ|$, więc $f(D) = Q$. Z definicji f wynika teza zadania.



Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 7 i 8 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n + 2$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1998 upłynął 31 stycznia 1999). Szkicowe rozwiązania podawane są w numerze $n + 4$.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. **4**), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. **10**, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44 M** lub **Klubu 44 F**.

14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44 M** (lub **Klubu 44 F**) daje tytuł **Weterana Klubu 44 M** (**Klubu 44 F**).

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy uczestnik wykona ruch w górę.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka.

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian regulaminu.

Zadania z matematyki nr 375, 376

Redaguje Marcin E. KUCZMA

375. W trójkącie ABC, mającym kąty ostre przy wierzchołkach A i B, odcinek CD jest wysokością. Prosta przechodząca przez środki okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD przecina proste CA i CB odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że jeśli $|CP| = |CQ|$, to trójkąt ABC jest równoramienny lub prostokątny.

376. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Rozważamy wszystkie pary (k, m) liczb naturalnych spełniające warunki:

$$1 \leq k < m \leq n, \quad k + m > n, \quad \mathrm{NWD}(k, m) = 1.$$

Obliczyć sumę $\sum \frac{1}{km}$, której składniki odpowiadają wszystkim rozważanym parom (k, m).

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 1999

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1998

Przypominamy treść zadań:

367. Liczby nieujemne a, b, c, x, y, z spełniają układ równań

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{b+y} + \sqrt{c+z} = 1$$
$$\sqrt{a+y} + \sqrt{b+z} + \sqrt{c+x} = 1$$
$$\sqrt{a+z} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+y} = 1.$$

Dowieść, że $a = b = c$ lub $x = y = z$.

368. Niech $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ... będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych. Znaleźć kres dolny zbioru liczb postaci $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

367. Można założyć, że $a \leq b \leq c$. Przypuśćmy, że $a < c$; należy wykazać, że wówczas $x = y = z$. Weźmy pod uwagę funkcje określone dla $t \geq 0$ wzorami

$$f(t) = \sqrt{b+t} - \sqrt{a+t}, \qquad g(t) = \sqrt{c+t} - \sqrt{b+t},$$
$$h(t) = \sqrt{c+t} - \sqrt{a+t} = f(t) + g(t).$$

Odejmując równania stronami, dostajemy związki:

$$f(y) + g(z) - h(x) = 0 \quad \text{oraz} \quad f(z) + g(x) - h(y) = 0.$$

Uwzględniając równość $h = f + g$, przepisujemy je w postaci:

$$(*) \qquad g(z) - g(x) = f(x) - f(y) \quad \text{oraz} \quad g(x) - g(y) = f(y) - f(z).$$

Jeśli $a < b = c$, to funkcja $f(t) = \dfrac{b-a}{\sqrt{b+t} + \sqrt{a+t}}$ jest ściśle malejąca, a funkcja g jest stała, więc ze związków $(*)$ wynika natychmiast, że $x = y = z$. Sytuacja jest analogiczna, gdy $a = b < c$. Jeśli wreszcie $a < b < c$, to obie funkcje f i g są ściśle malejące; ze związków $(*)$ wnosimy teraz, że różnice $z - x$, $x - y$, $y - z$ są jednocześnie dodatnie, ujemne lub równe zeru. Pierwsze dwie możliwości trzeba jednak wykluczyć, bo suma tych trzech różnic jest zerowa. Zatem $x = y = z$.

368. Przypuśćmy, że kres dolny rozważanego zbioru liczb jest dodatni. Istnieje więc liczba $\varepsilon > 0$, taka, że $\sqrt{p_{k+1}} - \sqrt{p_k} \geq \varepsilon$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$. W takim razie

$$\frac{1}{\sqrt{p_k}} - \frac{1}{\sqrt{p_{k+1}}} = \frac{\sqrt{p_{k+1}} - \sqrt{p_k}}{\sqrt{p_k p_{k+1}}} \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_k p_{k+1}}} > \frac{\varepsilon}{p_{k+1}} \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Podstawiamy $k = 1, 2, \ldots, n$ i dodajemy te nierówności:

$$\frac{1}{\sqrt{p_1}} - \frac{1}{\sqrt{p_{n+1}}} > \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_{k+1}}.$$

Lewa strona nie przekracza $1/\sqrt{2}$. Wiadomo jednak, że szereg złożony z odwrotności wszystkich liczb pierwszych jest rozbieżny. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że szukany kres dolny jest równy zeru.

Lista uczestników
ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 363 (WT=3,51) i 364 (WT=1,36)
z numeru 6/1998

Maciej Mostowski	–	43,90
Tadeusz Józefczyk	– 2-	41,32
Krzysztof Zapisek	–	41,22
Zbigniew Skalik	–	40,28
Witold Bednorz	– 1-	39,62
Witold Bednarek	–	39,62
Bogumiła Piotrowska	–	34,29
Andrzej Jóźwik	–	34,12
Paulina Domagalska	–	34,09
Tomasz Wietecha	– 3-	27,87
Krzysztof Jasek	–	27,47
Nikodem Szpak	–	26,69
Artur Arciszewski	–	26,15
Wojciech Maciak	–	25,46
Mieczysław Jędrzejowski	–	24,99
Jan Ciach	– 5-	24,98
Andrzej Daniluk	–	23,73
Zbigniew Sewartowski	–	23,65
Michał Lewandowski	–	22,96
Rafał Pikuła	–	22,73
Marian Łupieżowiec	–	22,64
Przemysław Gadziński	– 6-	22,39
Marek Prauza	– 3-	20,73
Bartosz Putrycz	–	20,31

Legenda (przykładowo): stan konta 6-22,39 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 22,39 punktów.

Zacząć trzeba od karty żałobnej. Nie żyje **Jan Ciach**. Uczestnikom ligi zadaniowej to nazwisko jest doskonale znane. Pan Ciach był wieloletnim nauczycielem matematyki już w roku 1983, gdy rozpoczynał swój udział w lidze. Od tego czasu dał się poznać jako autor wielu ciekawych zadań oraz błyskotliwych rozwiązań, często przytaczanych w dorocznych omówieniach. Zadziwiał erudycją, szczególnie w zakresie tradycyjnej geometrii. Przez kilka lat był stałym korespondentem działu zadań kanadyjskiego miesięcznika *Crux Mathematicorum*. W naszej lidze wykonał pięć 44-punktowych rund; ostatni list przysłał w roku 1996. Ciężko pogodzić się z myślą, że już nie będziemy rozwiązywać zadań autorstwa pana Jana.

W regulaminie ligi zadaniowej czytamy o spotkaniach jej uczestników. W początkowym okresie istnienia ligi takie spotkania odbywały się dość regularnie, w odstępach mniej więcej półtorarocznych. Potem przyszły cięższe czasy...

I oto w minionym roku udało się powrócić do tradycji: w dniach 26–27 września 1998 spotkaliśmy się w gronie członków Klubu 44 M, którzy nie przerwali kontaktu z ligą. Jednym z punktów programu spotkania była sesja „szybkiego rozwiązywania zadań", otwarta dla publiczności i wkomponowana w ciąg imprez II Festiwalu Nauki. Uczestnicy spotkania posłuchali także wykładu Zbigniewa Marciniaka o metodach, którymi zostało udowodnione Wielkie Twierdzenie Fermata. A poza tym – porozmawialiśmy sobie o różnych sprawach związanych (lub nie związanych) z ligą zadaniową, z *Delta* i z matematyką. Ciekawe, kiedy uda nam się spotkać ponownie...

Przechodzimy do corocznego omówienia; jak zwykle, przedstawiamy rozwiązania odmienne (i zwykle ciekawsze) od naszych „firmowych", a także znalezione uogólnienia. Odnotowujemy ponadto te zadania, gdzie poprawne rozwiązania były bardzo nieliczne.

Zestawienie na poprzedniej stronie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1996, 1997 lub 1998.
Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani **Klubu 44 M** (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (4), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (4), P. Gadziński (6), K. Jedziniak, J. Olszewski, L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha
(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie **Klubu 44 M** (alfabetycznie; nie powtarzamy nazwisk figurujacych na liście powyżej):
„dwukrotni":
Z. Bartold, A. Czornik, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Pióro, S. Solecki, J. Witkowski, G. Zakrzewski;
„jednokrotni":
T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, B. Dyda, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, P. Kubit, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Łazuka, J. Mańdziuk, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, W. Olszewski, K. Patkowski, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Zmijewski.

Zadanie **346.** [$\min\{V$: każdy wielościan wypukły, który nie zawiera czworościanu o objętości 1, jest zawarty w czworościanie o objętości $< V\} = ?$] (współczynnik trudności WT=3,07; liczba poprawnych rozwiązań LPR=5). Pełne rozwiązania, zasadniczo identyczne z rozwiązaniem firmowym, podali: **W. Bednorz**, **A. Daniluk**, **P. Gadziński**, **P. Kumor**, **T. Rawlik**.

Zadanie **351.** [$\max\{ n \in \mathbf{N}$: $\exists$ zbiory $A_1, \ldots, A_n$: $|A_i| = 4$, $|A_i \cap A_j| = 1$ dla $i \neq j$, $A_1 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset\} = ?$] ($WT$=1,27; LPR=10). Wynik: 13. Jeśli zamiast zbiorów czteroelementowych będziemy rozważać zbiory k-elementowe, wówczas otrzymamy nierówność $\max n \leq k^2 - k + 1$; takie uogólnienie wskazali: **B. Dyda**, **T. Józefczyk**, **T. Wietecha** oraz **M. Lewandowski**, który ponadto zwrócił uwagę na związek zadania z bardziej ogólnymi zagadnieniami z teorii skończonych geometrii rzutowych i konfiguracji kwadratowych oraz udowodnił (dowód długi!), że owa nierówność staje się równością (w szczególności) dla liczb k postaci $p^m + 1$ (p – liczba pierwsza).

Zadanie **358.** [Niech $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin^2 kx$; czy $(f(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbf{R}) \Rightarrow (\sum a_k \geq 0)$?] ($WT$=1,80; LPR=12). Rozwiązanie firmowe było za długie – prawdziwość rozważanej implikacji wynika natychmiast z równości $\int_0^{\pi} f(x)dx = (\pi/2) \sum a_k$, zauważonej przez autorów większości rozwiązań.

Zadanie **359.** [Czy istnieją funkcje f, g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o własnościach: $fg(x) = x^2$, $gf(x) = x^4$?] (WT=2,38; LPR=3). Przykłady takich par funkcji, nie różniące się istotnie od rozwiązania firmowego, podali **A. Daniluk** i **W. Bednorz**. Całkiem inny przykład znalazł **P. Kumor**: przedziały $J_n = [2^{2^n}; 2^{2^{n+1}})$ w sumie (gdy $n \in \mathbf{Z}$) wypełniają przedział $J = (1; \infty)$; wzór $g(x) = (7x^{2^{-n}} - 12)^{4^n}$ dla $x \in J_n$ określa funkcję odwracalną g: $J \to J$; przyjmijmy $f(x) = g^{-1}(x^4)$ dla $x \in J$. Tak określone funkcje f i g spełniają zadane równości na zbiorze J – pozostaje tylko rozszerzyć je (jak w rozwiązaniu firmowym) do pełnej dziedziny $\mathbf{R}$.

Stosunkowo niski współczynnik trudności w zadaniach 359 i 360 jest wynikiem niewielkiej liczby przysłanych w tym miesiącu prac; zestaw zadań okazał się trudniejszy, niż przypuszczaliśmy.

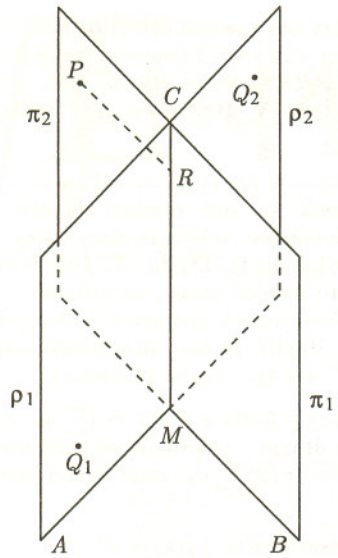
Zadanie **360.** [Ciąg $(a_1, \ldots, a_{2n+1})$ ma własność: po odrzuceniu dowolnego wyrazu pozostałe można rozbić na dwie równoliczne grupy o równych sumach $\Rightarrow (a_1 = \ldots = a_{2n+1})$] ($WT$=2,80; LPR=2). Autorem rozwiązania firmowego jest **P. Kumor**, który zadanie zaproponował. Drugie poprawne rozwiązanie – efektowne, choć odwołujące się do nie całkiem elementarnych faktów z algebry liniowej – przedstawił **W. Bednorz**: wektor $\mathbf{w} = (a_1, \ldots, a_{2n+1})$ spełnia równanie $A\mathbf{w} = \mathbf{0}$, gdzie A jest macierzą $(2n+1) \times (2n+1)$ mającą zera na przekątnej, a poza tym plus-minus jedynki, o sumie 0 w każdym wierszu. Jedną z wartości własnych jest 0; każdy wektor postaci $(a, \ldots, a)$ jest jej wektorem własnym. Należy dowieść, że innych nie ma, a więc że jest to wartość własna jednokrotna – czyli, że w wielomianie charakterystycznym współczynnik przy zmiennej w pierwszej potędze jest niezerowy; to zaś nietrudno stwierdzić rozważając ów wielomian nad ciałem $\mathbf{Z}_2$ i wykazując, że współczynnik, o który chodzi, jest liczbą całkowitą nieparzystą. Zgrabne!

Zadanie **362.** [Dane okręgi $\omega_i = o(O_i, r)$, $i = 1, 2, 3, 4$; $\omega_i \cap \omega_{i+1} = \{S, P_i\}$; $P_i \in o(Q, R)$, $|QS| = d$; jakie równanie wiąże R, r, d? czy każda trójka $R, r, d > 0$, spełniająca to równanie, jest „dobra"?] (WT=2,20; LPR=6). Szukane równanie: $R^2 + d^2 = 2r^2$. **W. Bednorz**, **P. Gadziński**, **J. Łazuka**, **Z. Skalik**, **T. Wietecha** przedstawili wyprowadzenia „czysto geometryczne", wszelako wymagające troski o pełną ogólność (niezależność od rysunku), i przez to nie prostsze od rozwiązań za pomocą rachunków: na wektorach (rozwiązanie firmowe) bądź na liczbach zespolonych (**L. Skrzypek**, autor zadania).

Na ostatnie pytanie z zadania rozwiązanie firmowe odpowiada: *tak*. Nie pierwszy to raz, i na pewno nie ostatni, gdy redaktorowi ligi zadaniowej zdarza się coś przeoczyć – tym razem przegapiony został przypadek: $R = r = d$; dla takich liczb nie istnieje odpowiednia czwórka okręgów. Prawidłową odpowiedź *nie* podali wszyscy rozwiązujący, wykazując ponadto, że jest to jedyny przypadek, w którym „coś się psuje".

Zadanie **363.** [$ABCD$ – czworościan foremny; $P \in$ pł BCD, $Q \in$ pł $CDA \Rightarrow |AP|$, $|PQ|$, $|QB|$ są długościami boków trójkąta] (WT=3,51; LPR=3). Szybkie rozwiązanie firmowe polegało na wyjściu z rozważaniami w przestrzeń czterowymiarową. Jak to zadanie zrobić w sposób *less sophisticated*, pokazał **P. Gadziński**: niech π_1, ρ_1 będą półpłaszczyznami o krawędzi CD, zawierającymi odpowiednio punkty B i A, i niech π_2, ρ_2 będą półpłaszczyznami uzupełniającymi π_1, ρ_1 do całych płaszczyzn. Z uwagi na symetrię ról P i Q, wystarczy udowodnić dwie nierówności:

(1) $|AP| + |PQ| > |BQ|$ oraz (2) $|AP| + |BQ| > |PQ|$.



Napis $[XYZ]$ będzie oznaczał, że korzystamy z nierówności $|XY| + |YZ| > |XZ|$ dla trójkąta XYZ.

Gdy $P \in \pi_1$, wówczas $|AP| \geq |BP|$ i nierówności (1) oraz (2) są prostymi wnioskami z $[BPQ]$ oraz $[PBQ]$. Dalej zakładamy, że $P \in \pi_2$; niech M będzie środkiem odcinka CD i niech R będzie rzutem punktu P na prostą CD; kąt między półpłaszczyznami ρ_1 i π_2 jest rozwarty, więc

(3) $\quad |AP| \geq |AR| = |BR| \quad$ oraz $\quad$ (4) $\quad |AP| \geq |MP|$.

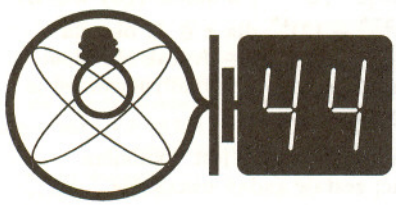
Jeżeli teraz $Q \in \rho_1$ (na rysunku: punkt Q w położeniu Q_1), to (analogicznie do (3)) $|QP| \geq |QR|$; stąd, z (3) i z $[BRQ]$ wynika teza (1); a teza (2) jest konsekwencją nierówności $|AQ| \leq |BQ|$ oraz $[PAQ]$. Jeśli natomiast $Q \in \rho_2$ (na rysunku: $Q = Q_2$), to (analogicznie do (4)) $|BQ| \geq |MQ|$; stąd, z (4) i z $[PMQ]$ wynika teza (2); a teza (1) jest konsekwencją nierówności $|AQ| \geq |BQ|$ oraz $[APQ]$.

Jak zauważa autor rozwiązania, foremność czworościanu nie jest istotna: korzysta się tylko z tego, że prosta CD leży w płaszczyźnie symetralnej odcinka AB oraz z rozwartości kąta między półpłaszczyznami ρ_1 i π_2.

Dość podobne rozwiązanie (dla czworościanu foremnego) podał **W. Bednorz**; autorem trzeciego dobrego rozwiązania, mocno rachunkowego, jest **L. Skrzypek**.

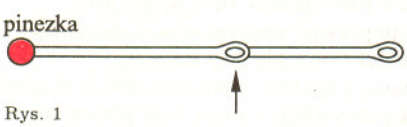
Zadania z fizyki nr 272, 273

Redaguje Jerzy B. BROJAN

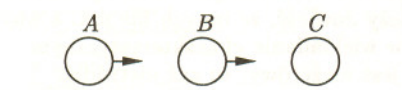


Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 1999

272. Konferencja była beznadziejnie nudna. Podsekretarz ziewnął i machinalnie zaczął się bawić dwoma patyczkami pozostawionymi przez kogoś na stole. Były różnej długości, a na każdym z końców miały ucha. Podsekretarz włożył pinezkę w ucho jednego z patyczków, wbił ją w stół i pchnął patyk. „Lekko się kręci" – zauważył i stracił resztkę zainteresowania referatem. „A gdyby tak ucho drugiego patyczka przymocować do ruchomego końca?" Zmacał w kieszeni kawałek nitki i związał końce patyczków. Po ustawieniu drugiego na przedłużeniu pierwszego przytknął w miejsce ich połączenia (rys. 1) – trochę mocniej, niż zamierzał, bo stuk zderzających się drewienek rozległ się w całej sali. „Ależ co pan wyprawia!" – zawołał Przewodniczący. „Przepraszam" – wyjąkał Podsekretarz – „powinienem był zamienić te patyczki miejscami, wtedy nie narobiłbym tyle hałasu". Przewodniczący przyjrzał się zestawowi. „Ciekawe... ale wątpię, czy zamiana by coś dała" – oświadczył.
W jakich warunkach rację miałby Podsekretarz, a w jakich – Przewodniczący (tzn. jaki związek muszą spełniać masy i długości patyczków, aby na skutek przytknięcia patyczki uderzyły o siebie)? Przyjąć, że są jednorodne i pominąć tarcie o stół.



Rys. 1



Rys. 2

Rys. 3

273. Tempo przepływu ciepła przez ścianę (moc cieplna na jednostkę powierzchni) jest proporcjonalne do różnicy temperatur między wewnętrzną a zewnętrzną powierzchnią ściany, a stała proporcjonalności k charakteryzuje skuteczność izolacji cieplnej. Jeśli wartość tego współczynnika dla „gołej" ściany wynosi $k_1 = 0{,}8$ W/(m^2·K), a dla dodatkowej warstwy styropianu – $k_2 = 0{,}7$ W/(m^2·K), to ile jest równy współczynnik k dla ściany obłożonej dwiema takimi warstwami, od wewnątrz i od zewnątrz?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1998

Przypominamy treść zadań:

264. a) Dwie kulki poruszają się z prędkością równą 1 w stronę trzeciej kulki nieruchomej (rys. 2). Jeśli masy kulek są jednakowe, a zderzenia – centralne i doskonale sprężyste, to zwykle obserwujemy, że kulka A się zatrzyma, a B i C będą po zderzeniu poruszać się z prędkością 1. Załóżmy jednak, że np. zderzenie kulek B i C jest „miękkie", tzn. odbywa się za pośrednictwem nieważkiej sprężynki, a w trakcie jej ugięcia następuje „twarde" zderzenie kulek A i B (które dotąd poruszały się w pewnej wzajemnej odległości). Ile wynosi maksymalna prędkość, którą może w takim przypadku uzyskać kulka C?
b) Dla czterech jednakowych kulek, z których początkowo dwie spoczywały, a dwie poruszały się z prędkością 1 (rys. 3) obliczyć maksymalną prędkość, którą może uzyskać kulka D i zaprojektować taki układ sprężynek między kulkami i taki przebieg kolejnych zderzeń, aby w ich wyniku kulka D została rozpędzona do tej prędkości.

265. Cewka czułego galwanometru jest zawieszona na nici kwarcowej mającej właściwości sprężyste, tak że kąt obrotu jest proporcjonalny do momentu siły, a stała proporcjonalności wynosi $0{,}89 \cdot 10^{-13}$ Nm/rad. Na skutek fluktuacji ciśnienia powietrza (przypadkowych niewielkich zgęszczeń i rozrzedzeń) cewka drga, a średnia kwadratowa wartość kąta odchylenia od położenia środkowego wynosi $2{,}14 \cdot 10^{-4}$ rad. Obliczyć temperaturę powietrza.

264. a) Oznaczmy prędkości kulek po ustaniu ich wzajemnego oddziaływania przez v_A, v_B i v_C. Z zasad zachowania pędu i energii mamy

$$v_A + v_B + v_C = 2, \qquad v_A^2 + v_B^2 + v_C^2 = 2.$$

Nietrudno wykazać, że maksymalna wartość v_C, która jest zgodna z tymi równaniami, wynosi 4/3 (wtedy $v_A = v_B = 1/3$). Taką prędkość uzyska kulka C, jeśli zderzenie A z B nastąpi w chwili, gdy sprężynka zmniejszy prędkość B do wartości 1/3 (a prędkość C wzrośnie do 2/3). Wtedy bowiem A i B wymienią się prędkościami, a w wyniku „dopchnięcia" sprężynki kulka C ulegnie rozpędzeniu do obliczonej prędkości 4/3.

b) Maksymalną wartością v_D jest $(1 + \sqrt{3})/2 \approx 1{,}366$, a jej osiągnięcie wymaga, aby pozostałe trzy kulki poruszały się z jednakową prędkością $v = (1 - 1/\sqrt{3})/2 \approx 0{,}211$. Aby tak się stało, zderzenie powinno przebiegać według następującego schematu: najpierw „miękko" zderzają się środkowe kulki B i C; gdy B osiągnie prędkość v, następuje „twarde" zderzenie A z B; sprężynka między B a C ulega rozprostowaniu, a te kulki

oddalają się od siebie; rozpoczyna się „bardzo miękkie" zderzenie C z D; w momencie, gdy C zwalnia do prędkości v, następuje powtórne zderzenie B z C (uwaga: założenie, że sprężynka między C a D jest bardzo miękka, oznacza, że zderzenie B z C trwa o wiele krócej i w tym czasie oddziaływanie z D można pominąć); sprężynka między C a D ulega rozprostowaniu.

265. Energia sprężystości nici jest dana wyrażeniem $\frac{1}{2}\gamma\alpha^2$, gdzie γ – stała sprężystości. Z drugiej strony zgodnie z prawami fizyki statystycznej (zasada ekwipartycji energii) średnia wartość tej energii wynosi $\frac{1}{2}kT$, gdzie k – stała Boltzmanna, równa $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K. Przyrównując oba wyrażenia znajdujemy $T = 295$ K $= 22°$C.

Jedną z imprez II Festiwalu Nauki w Warszawie we wrześniu zeszłego roku był **Turniej Rozwiązywania Zadań z Fizyki**, będący w pewnym stopniu przedłużeniem ligi zadaniowej **Klubu 44F**. Spośród nazwisk znanych z czołówki ligowej pojawili się (specjalnie zaproszeni) **Andrzej Idzik** i **Marek Wójcicki**; ponadto przybył początkujący w lidze **Tomasz Rudny**. Pierwsze trzy miejsca zajęli kolejno: **A. Idzik**, **T. Rudny** i **Paweł Bajurko**, a pierwsi dwaj wygrali nagrody w postaci elektronicznych mierników uniwersalnych. Oto niektóre z zadań turniejowych (rozwiązań nie podajemy, żeby nie psuć Czytelnikom zabawy):

1. Soczewkę skupiającą przecięto na pół i nieco rozsunięto połówki, zasłaniając szparę nieprzezroczystą przesłoną. Narysuj obraz rzeczywisty przedmiotu o kształcie cyfry 1, uzyskany za pomocą takiego zestawu.

2. Ktoś strzela do Ciebie z pistoletu. Możesz osłonić się deską, którą jednak pocisk przebija. Co lepiej: a) trzymać deskę nieruchomo, b) w chwili strzału wykonać gwałtowny ruch, szybko odsuwając ją od siebie, c) szybko zbliżać ją do siebie, d) nie ma to znaczenia?

3. Czy energię można spalić? Brzmi to niedorzecznie, ale... rozważmy taką sytuację. Zakładając obóz u podnóża góry, zebraliśmy wiązkę chrustu, potem jednak zdecydowaliśmy się przenieść obóz na szczyt góry i niesiemy tam przygotowany chrust. Gdy go spalimy, zniknie też energia grawitacyjna chrustu. Gdzie się ona podzieje? (Pomysł zadania został ściągnięty z *Kwanta* sprzed około 20 lat.)

4. Oceń orientacyjnie pracę wykonaną przez mięśnie człowieka przy zabiciu komara ręką. Uzasadnij dane wprowadzane do obliczeń i podaj konkretny wynik liczbowy.

Jak co roku, przegląd rozwiązań przysłanych przez Czytelników nasunął pewne dodatkowe uwagi:

Zadanie **243** [Drgania w rozgałęzionym obwodzie LC] (współczynnik trudności WT=3,00; liczba poprawnych rozwiązań LPR=2). Bezbłędne wyniki przedstawili **A. Idzik** oraz **T. Wietecha**, który zauważył przy tym, że problem został rozpatrzony w rozdziale I podręcznika *Fale* Crawforda. Rozwiązanie naszego zadania wymagało tylko pewnych uzupełnień.

Zadanie **245** [Zamknięcie klucza w obwodzie z żaróweczkami] (WT=2,54; LPR=6). Chociaż rozwiązania **A. Arciszewskiego**, **P. Gadzińskiego**, **A. Idzika**, **A. Surmy**, **T. Wietechy** i **M. Wójcickiego** zostały ocenione powyżej 0,5, to jednak wszystkie są obarczone wadą polegającą na przyjęciu założenia, że opór żaróweczek jest stały. Ze względu na nieliniowość żaróweczek lepiej tego założenia unikać.

Zadanie **246** [Trzy walce ułożone w piramidę, obliczyć współczynniki tarcia] (WT=1,25; LPR=5). Jak zwrócili uwagę niektórzy Czytelnicy, zadanie to było kiedyś na Olimpiadzie Fizycznej, czego autor nie pamiętał. Bezbłędne rozwiązania – **A. Arciszewski**, **A. Idzik**, **T. Rudny**, **T. Wietecha** i **M. Wójcicki**.

Zadanie **251** [Oświetlenie różnych punktów powierzchni Ziemi w czasie zaćmienia Słońca] (WT=3,00; LPR=1). Przyjęte we wzorcowym rozwiązaniu założenie, że krzywiznę powierzchni Ziemi można pominąć, okazało się niedobre – wynikało z niego, że szukany stosunek natężeń oświetlenia wynosi 0,61, podczas gdy według ścisłych obliczeń **A. Idzika** poprawną wartością było 0,73. Gdyby to p. Idzik wystawiał oceny, trudno byłoby mi liczyć na więcej niż połowę punktów! Całe szczęście, że na razie prowadzący Ligę punktuje prace Czytelników, a nie na odwrót...

Zadanie **256** [Siła wywierana przez strumień cząstek na kulę pochłaniającą je lub odbijającą] (WT=2,02; LPR=4). W zasadzie rozwiązanie wymagało całkowania, co wykonali bezbłędnie **A. Idzik** i **M. Wójcicki** oraz z pewną niedokładnością **J. Łazuka**. Na szczególną uwagę zasługuje praca **G. Miłosia** (ucznia szkoły podstawowej!), który rozwiązując zadanie, poniekąd „wynalazł" rachunek całkowy, tzn. zastąpił całkę po powierzchni przekroju kuli sumą dużej liczby składników. Mimo ostatecznie błędnego wniosku należy pogratulować umiejętności!

Zadanie **259** [Luneta z trzech jednakowych soczewek] (WT=3,01; LPR=2). Lunety przekształcają równoległą wiązkę światła w wiązkę także równoległą, biegnącą pod większym kątem do osi. Ta podstawowa właściwość okazała się nieznana części Czytelników – może należało dodać w treści odpowiednią wskazówkę? Dobre rozwiązania – **A. Idzik** i **J. Łazuka**.

Zadanie **260** [Zespół filtrów obraca płaszczyznę polaryzacji] (WT=2,43; LPR=4). We wzorcowym rozwiązaniu brakowało uzasadnienia, dlaczego kąty pomiędzy kolejnymi filtrami powinny być jednakowe. Czytelnicy – m.in. **A. Idzik**, **J. Łazuka**, **G. Miłoś** i **A. Nowogrodzki** – okazali się na ogół staranniejsi.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 261 zadaniach

Jarosław Łazuka	– Warszawa	1- 34,24
Marek Wójcicki	– Szczecin	32,15
Tomasz Wietecha	– Tarnów	2- 26,49
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	1- 25,64
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	1- 16,69
Aleksander Surma	– Myszków	3- 15,46
Artur Arciszewski	– Kielce	11,01
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	2- 10,15
Jacek Konieczny	– Poznań	8,65

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1996–1998 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 8 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już **44** punkty.

Jak się okazało, p. **Wójcicki** rozpoczął swą działalność w lidze fizycznej już na początku 1985 roku, po czym przerwał ją na prawie 13 lat. Jest to z pewnością rekordowo długa przerwa w ciągu istnienia Ligi – tym bardziej cieszymy się z powrotu! Niestety, podczas przekazywania dokumentacji od poprzednio prowadzącego ligę, p. Nadolnego, niektóre dane o uzyskanych wówczas punktach zostały utracone. Prosimy o wybaczenie!

Pozostali członkowie **Klubu 44F** (alfabetycznie; liczby w nawiasach oznaczają wielokrotność przekroczenia **44** punktów):
P. Bała (3), A. Borowski (1), P. Gadziński (1), A. Gluza (1), P. Gworys (3), W. Kacprzak (1), J. Lipkowski (2), D. Lipniacki (3), B. Mikielewicz (1), L. Motyka (1), R. Musiał (1), P. Perkowski (2), T. Rawlik (1), R. Repucha (1), A. Sikorski (3), J. Stelmach (1), L. Szalast (1), P. Wach (1).