mała delta

Nowinki z czasów Hannibala

Wzór, od którego zaczęliśmy, uzasadnia się oczywiście indukcyjnie, czyli tak: dla $n = 1$ prawa strona jest równa 1, czyli jest równa lewej; jeśli z kolei wzór jest dobry dla jakiegoś k, to obliczamy, co będzie dla $(k+1)$:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$
$$= (k+1)\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6} =$$
$$= \frac{k+1}{6}(2k^2+7k+6) =$$
$$= \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3) =$$
$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6},$$

co oznacza, że wzór jest prawdziwy i dla następnej liczby, a tym samym dla wszystkich liczb naturalnych od 1 poczynając.

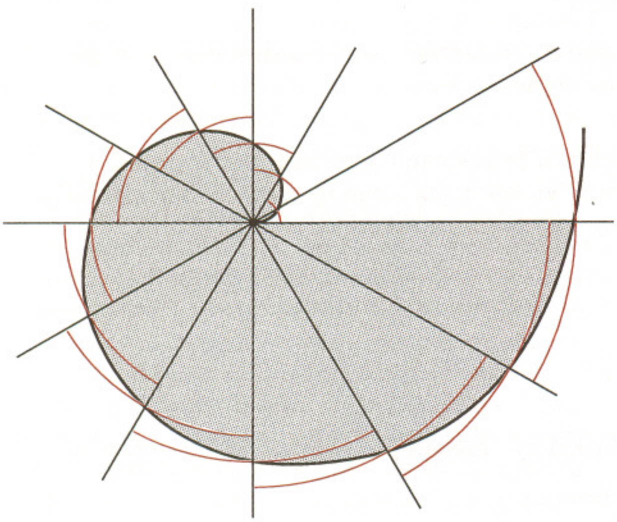
Nie każdy wie, że dla każdej liczby naturalnej n

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ten, kto jak Archimedes wie, może obliczyć pole, ograniczone jednym zwojem spirali... Archimedesa.

Spirala Archimedesa powstaje w ten sposób, że punkt leżący na jednostajnie obracającej się (względem swego początku O) półprostej jednostajnie oddala się od O. Czyli jego odległość od O jest równa $a \cdot \varphi$, gdzie a jest pewną stałą, φ zaś jest kątem, o który półprosta zdążyła się obrócić (kąty będziemy mierzyli w mierze łukowej). Podzielmy kąt pełny (równy 2π) na n równych części i zaznaczmy ich brzegi na spirali. Przez każdy punkt podziału poprowadźmy w obu sektorach, które do niego dotykają, łuk okręgu o środku w O. Jeśli zliczymy pola tych wycinków okręgu, które są ograniczone przez łuki leżące na zewnątrz spirali, to otrzymamy górne ograniczenie pola ograniczonego przez jeden zwój spirali. Pole takiego wycinka to jedna n-ta koła o promieniu $a \cdot k\frac{2\pi}{n}$, gdzie k będzie kolejno równe 1, 2, ... aż do n. Łącznie będzie to

$$\frac{1}{n}\pi\left(a\cdot\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\pi\left(a\cdot 2\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\pi\left(a\cdot 3\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\pi\left(a\cdot n\frac{2\pi}{n}\right)^2 =$$
$$= 4\pi^3a^2\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2) = 4\pi^3a^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = 4\pi^3a^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right).$$



Zauważmy jednak, że takie same wycinki koła, tylko ograniczone łukami leżącymi wewnątrz spirali, dają dolne ograniczenie pola. Jest ich tylko o jeden (ten największy) mniej. Zatem by to ograniczenie obliczyć, należy przeprowadzić podobny rachunek, sumując o jeden wyraz mniej. Wyjdzie

$$4\pi^3a^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right).$$

Do zakończenia rozważań trzeba tylko zauważyć, że gdy będziemy powiększali n, obie uzyskane liczby będą z dowolną, coraz większą dokładnością przybliżać z góry i z dołu liczbę

$$\frac{4}{3}\pi^3a^2,$$

która wobec tego jest wartością poszukiwanego pola ograniczonego jednym zwojem spirali Archimedesa.

Nie wątpię, że teraz każdy już potrafi obliczyć pole ograniczone dowolną (również niecałkowitą), choć jednak wymierną liczbą zwojów tej spirali.

Małą Deltę opracował Marek KORDOS