Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

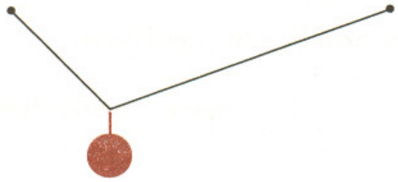
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 1999

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Zadania z fizyki nr 270, 271

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1

270. Końce lekkiego, nierozciągliwego sznurka o wytrzymałości 50 N i długości 1 m są przywiązane do haczyków umocowanych na tym samym poziomie i odległych od siebie o 0,87 m. Ile wynosi maksymalna wartość ciężaru, który można zawiesić na tym sznurku (rys. 1) i w którym miejscu należy go zaczepić? Ile wynosi maksymalna wartość ciężaru, który można zawiesić w dowolnym miejscu na tym sznurku i w którym miejscu ryzyko zerwania jest największe?

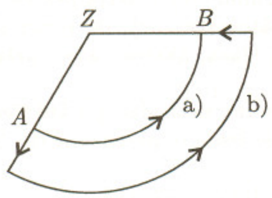
271. Dane jest źródło stałego napięcia U i n jednakowych kondensatorów, które można łączyć w dowolny obwód, ładować ze źródła, rozłączać, łączyć ponownie, znów ładować itd. dowolną liczbę razy. Jakie maksymalne napięcie (maksymalne w sensie górnego kresu) można uzyskać w ten sposób?

Pytanie poza konkursem: ile razy trzeba użyć źródła U, aby osiągnąć napięcie równe 90% tego kresu górnego? Wystarczy odpowiedź przybliżona lub słuszna tylko dla dużych n.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1998

Przypominamy treść zadań:

262. Zerwanie się napiętego drutu stalowego jest niebezpieczne, gdyż urwane końce uzyskują przy tym dużą prędkość. Obliczyć wartość tej prędkości. Niezbędne dane wziąć z tablic.



Rys. 2

263. Punkt Z jest źródłem przenikliwego promieniowania izotropowego (tzn. którego natężenie nie zależy od kierunku), a punkty A i B są od niego jednakowo odległe, przy czym kierunki ZA i ZB tworzą kąt 120° (rys. 2). Którą drogę z A do B należy wybrać, idąc ze stałą prędkością, aby otrzymać przy tym jak najmniejszą dawkę promieniowania:

a) 1/3 okręgu o środku w Z,

b) odcinek z A w kierunku przeciwnym do Z (jak długi?), 1/3 okręgu o promieniu większym niż poprzednio i zbliżenie do Z wzdłuż promienia?

Czy istnieje rozwiązanie lepsze od każdego z tych dwóch? Jeśli tak, to opisać taką drogę i podać wartość otrzymanej dawki (niekoniecznie musi to być droga optymalna). Można użyć dowolnych jednostek.

262. Niech W będzie wytrzymałością stali, a E – modułem Younga, przy czym założymy, że prawo Hooke'a jest spełnione aż do chwili zerwania drutu. Energia sprężystości odcinka drutu o długości l i polu przekroju S jest dana wzorem $\mathfrak{E} = (1/2)kx^2 = F^2/2k$, gdzie stałą sprężystości k należy podstawić w postaci $k = ES/l$, a siła napinająca drut w chwili zerwania jest równa $F = WS$. Przyrównując $\mathfrak{E}$ do energii kinetycznej $(1/2)mv^2$ i podstawiając $m = \rho lS$, otrzymujemy

$$v = \frac{W}{\sqrt{\rho E}}.$$

Dla stali $W \approx 10^9$ N/m^2, $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ N/m^2, $\rho \approx 8 \cdot 10^3$ kg/m^3, zatem $v \approx 25$ m/s.

263. Jeśli – zgodnie z założeniem, że promieniowanie jest przenikliwe – pomijamy absorpcję w ośrodku, to natężenie promieniowania źródła punktowego jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości r do niego. Pochłonięta dawka promieniowania jest więc proporcjonalna do całki

$$D = \int \frac{\mathrm{d}t}{r^2} = \frac{1}{v} \int \frac{\mathrm{d}s}{r^2}.$$

Dla uproszczenia przyjmijmy jednostkową wartość prędkości v. Rozważmy wariant b); jeśli odległość punktu początkowego i końcowego od źródła promieniowania wynosi r, a wzdłuż promienia odchodzimy na odległość R, to dawka na tym odcinku wynosi $r^{-1} - R^{-1}$, na końcowym odcinku tyle samo, a na łuku $2\pi/3R$ – czyli łącznie

$$D = \frac{2}{r} + 2\left(\frac{\pi}{3} - 1\right)\frac{1}{R}.$$

Dawka ta jest mniejsza niż w przypadku a) (w którym $D = 2\pi/3r$), i to tym mniejsza, im większe jest R. Można jednak stwierdzić (np. na drodze obliczeń numerycznych), że odpowiednio dobierając drogę „nieco bardziej wypukłą od okręgu o środku w źródle", otrzymamy dawkę mniejszą nawet od $2/r$. Czytelnicy znający podstawy rachunku wariacyjnego mogą wykazać, że optymalnym rozwiązaniem jest okrąg przechodzący przez punkty: początkowy i końcowy oraz źródło, co odpowiada w naszym przypadku dawce $\sqrt{3}/r$.

Zadania z matematyki nr 373, 374

Redaguje Marcin E. KUCZMA

373. Niech J będzie zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych większych od 1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon J \to J$ spełniające warunek

$$\left(f(x^p y^q)\right)^4 \le f(x)^{1/p} f(y)^{1/q} \quad \text{dla } x, y > 1 \text{ oraz } p, q > 0.$$

374. Czy istnieje liczba całkowita $k \ge 1$, dla której iloraz $\dfrac{5^5 k^{10} - 1}{5k^2 - 1}$ jest liczbą pierwszą?

Zadanie **374** zaproponowała pani Joasia Jaszuńska z Warszawy.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 1999

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 361 (WT=1,54) i 362 (WT=2,20) z numeru 5/1998

Tadeusz Józefczyk	– Poznań	40,64
Zbigniew Skalik	– Pyskowice	38,92
Witold Bednarek	– Łódź	38,26
Witold Bednorz	– Tychy	34,75
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	34,29
Andrzej Jóźwik	– Kielce	32,76

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1998

Przypominamy treść zadań:

365. Znaleźć wszystkie czwórki liczb całkowitych $t, x, y, z > 0$ spełniające równanie

$$(x+y)(y+z)(z+x) = txyz$$

wraz z warunkiem: liczby x, y, z są parami względnie pierwsze.

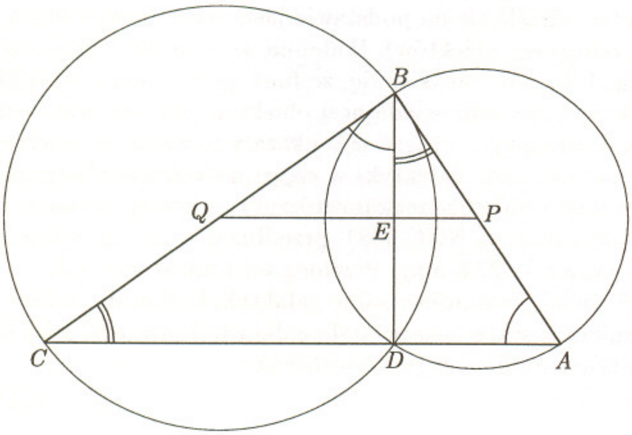
366. Punkt D leży na boku AC trójkąta ABC. Okrąg o środku P opisany na trójkącie ABD jest styczny do prostej BC. Okrąg o środku Q opisany na trójkącie BCD jest styczny do prostej AB. Odcinki PQ i BD przecinają się w punkcie E. Udowodnić, że

$$|PQ| \cdot |BD|^3 = 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot |PE| \cdot |QE|.$$

365. Przyjmijmy, że liczby t, x, y, z spełniają podane warunki. Liczba x jest wówczas dzielnikiem iloczynu napisanego po lewej stronie równania, przy czym nie ma wspólnych dzielników z żadnym z dwóch skrajnych czynników – jest więc dzielnikiem czynnika środkowego: $y + z = ax$ (a – liczba naturalna). Analogicznie $z + x = by$, $x + y = cz$ (b, c – liczby naturalne). Oznaczając sumę $x + y + z$ przez s, otrzymujemy układ równań

$$(a+1)x = s, \qquad (b+1)y = s, \qquad (c+1)z = s.$$

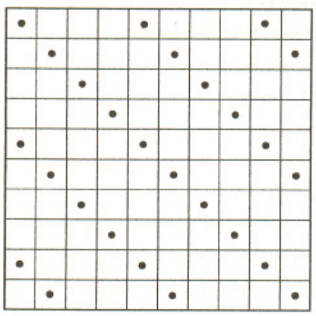
Możemy założyć, że $x \ge y \ge z$; wówczas $a \le b \le c$, $3x \ge s$, skąd $a + 1 \le 3$, czyli $a \le 2$. Jeśli $a = 2$, to $x = s/3$, czyli $x = y = z = 1$, $t = 8$. Jeśli zaś $a = 1$, to z podzielności liczby $s = 2x$ przez y i z (oraz z warunku, że x, y, z są względnie pierwsze) wynika, że $y = 1$, $z = 1$ lub $y = 2$, $z = 1$. W obu tych przypadkach łatwo wyznaczyć wartości x i t. Ostatecznie otrzymujemy trzy rozwiązania (t, x, y, z) (z dokładnością do permutacji trójki x, y, z): $(8,1,1,1)$, $(9,2,1,1)$, $(10,3,2,1)$.



366. Kąt BAD, wpisany w pierwszy z wymienionych okręgów, jest równy kątowi między cięciwą BD a styczną BC: $|\angle BAD| = |\angle CBD|$; analogicznie $|\angle BCD| = |\angle ABD|$. Miary kątów trójkąta ABC spełniają więc równość $|\angle B| = |\angle A| + |\angle C|$, z której wynika, że jest to trójkąt prostokątny ($|\angle B| = 90°$), a odcinek BD jest jego wysokością. Wobec tego odcinki BA i BC są średnicami rozważanych okręgów; punkty P i Q są ich środkami, a punkt E jest środkiem odcinka BD, i mamy równości:

$$|PQ| \cdot |BD| = 2 \cdot |PQ| \cdot |BE| = 4 \cdot \text{pole}(PBQ) = \text{pole}(ABC) = \tfrac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC|,$$
$$|BD|^2 = 4 \cdot |BE|^2 = 4 \cdot |PE| \cdot |QE|.$$

Mnożąc je stronami, dostajemy tezę zadania.



Rozwiązanie zadania M 870.

Nie. Każda z kostek pokrywałaby dokładnie jedno pole należące do 26-elementowego zbioru pokazanego na rysunku. Mamy jednak tylko 25 kostek, czyli o jedną za mało.

Uwaga: Prawdziwe jest następujące, nietrudne uogólnienie: *Szachownicę $m \times n$ można pokryć kostkami $1 \times k$ wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z liczb m lub n jest podzielna przez k.*

Rozwiązanie zadania F 492.

Na pewno nie 6 razy większą. Środek ciężkości wysokiego sportowca znajduje się na wysokości około 1,2 m. Podczas przejścia nad poprzeczką wznosi się on na co najmniej 2,1 m, a więc zmiana wysokości wynosi zaledwie 0,9 m. Na Księżycu sportowiec tym samym kosztem energii może unieść swój środek ciężkości na wysokość $6 \cdot 0{,}9 = 5{,}4$ m. Może więc skoczyć na wysokość $1{,}2 + 5{,}4 = 6{,}6$ m.

Zaniedbano małe zmiany położenia środka ciężkości wynikające z techniki skoku.