

Zgodnie z listopadową zapowiedzią w tym numerze prezentujemy naszym Czytelnikom wybór równań różniczkowych. Nie ma w nim, oczywiście, wszystkich równań różniczkowych świata: przygotowanie ich listy po pierwsze – przekracza nasze możliwości, po drugie – nie było naszą intencją. Chcieliśmy pokazać Czytelnikom w miarę reprezentatywną garść równań *ważnych*, zarówno z punktu widzenia różnych zastosowań, jak i samej matematyki. Mamy nadzieję, że się to nam choć w części udało.

Redakcja

Matematyka żywi się zmiennością, zmienność wyraża się (najczęściej) funkcją – stąd funkcje są w matematyce bardzo ważne. Często jednak bywa tak, że wiele wiadomo o zachodzących zmianach, ale trzeba dopiero odkryć funkcję, która je opisuje. Można wtedy spróbować ułożyć równanie, w którym owa funkcja będzie niewiadomą. Jeśli w równaniu występują jej pochodne, to mamy do czynienia z *równaniem różniczkowym* (dalej często zapisywanym jako „r.r.”). Gdy poszukiwana funkcja ma tylko jedną zmienną, takie równanie nazywa się *zwyczajnym*, jeśli to funkcja wielu zmiennych (a zatem trzeba mówić o jej pochodnych cząstkowych), mamy równanie różniczkowe *cząstkowe*. Liczne przykłady takich równań można znaleźć na dalszych stronach *Delty*. Jaka funkcja ma tę własność, że jej pochodna jest stała (czyli wartości funkcji zmieniają się w sposób jednostajny)? Równanie $y' = a$ ma, jak wiadomo, nie jedno rozwiązanie, lecz wręcz przeciwnie: nieskończenie wiele (każde postaci $y = ax + b$), i wszystkie one spełniają postawiony funkcji warunek. Aby zatem wyróżnić jedno z nich, trzeba ustalić, czego oczekujemy od wybranego rozwiązania. Jeśli np. funkcja y ma opisać drogę, przebytą przez obiekt w czasie x , to być może zechcemy uznać, że droga zaczyna się w zerowym momencie rozpoczęcia ruchu, czyli $y(0) = 0$. Teraz mamy już tylko jedną funkcję z wykresem przechodzącym przez punkt $(0, 0)$ i jest ona *rozwiązaniem szczególnym* równania. Taki dodatkowy warunek, pozwalający wyróżnić jedno rozwiązanie spośród wielu, nazywa się *warunkiem początkowym* lub *brzegowym*. Jeśli w r.r. (zwyczajnym) występują dalsze pochodne funkcji y aż do pochodnej n -tej, to po pierwsze, mówimy o równaniu *n -tego rzędu*, a po drugie, wyróżnienie jednego rozwiązania wymaga wskazania nie tylko wartości, jaką ma przyjmować funkcja w pewnym punkcie x_0 , ale także wartości każdej pochodnej rzędu nie większego od $n - 1$ w x_0 (taki warunek nazywa się *początkowym*) – lub n punktów, przez które ma przechodzić wykres y

(warunek brzegowy). Czytelnik może zechcieć to zobaczyć na prostym przykładzie równania $y'' = a$. Natomiast *ogólnym rozwiązaniem* r.r. (zwyczajnego lub cząstkowego) jest rodzina funkcji, zależnych od n parametrów (gdy r.r. jest rzędu n), a podstawienie konkretnych wartości za te parametry daje rozwiązanie *szczególne* (choć niekoniecznie wszystkie rozwiązania *szczególne* można tak otrzymać – te pozostałe są rozwiązaniami *osobliwymi*). Jeśli r.r. jest zwyczajne, parametry reprezentują liczby, jeśli cząstkowe – funkcje $n - 1$ zmiennych. Zadanie znalezienia rozwiązania *szczęólnego*, spełniającego dane warunki początkowe, nosi nazwę *zagadnienia Cauchy'ego*. Nie zawsze ma ono jednoznaczne rozwiązanie (może bowiem mieć ich kilka lub wcale). Stąd podstawowe twierdzenia teorii r.r. dotyczą warunków istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego. Na koniec tych przygotowań do lektury niełatwych tekstów, wypełniających nasz atlas równań różniczkowych, należy wspomnieć o pewnym zagadnieniu, zrodzonym z motywacji praktycznych, a mianowicie o *stabilności*. Otóż w zastosowaniach r.r. wartości, występujące w warunkach początkowych, pochodzą często z „życia”, czyli z obserwacji i pomiarów. Są więc zazwyczaj obarczone niedokładnością – ale mimo to na takich właśnie wartościach opiera się poszukiwanie odpowiedniego rozwiązania *szczęólnego*. Byłoby dobrze, gdyby owe niedokładności nie wpływały nadmiernie na rozwiązanie. Wyróżnia się zatem rozwiązania *stabilne*, czyli takie, które ulegają tylko małym zmianom, gdy mało zmieniają się wartości początkowe. Inne są z praktycznego punktu widzenia nieprzydatne. Metody rozwiązywania (*całkowania*) r.r. to tylko jeden z mnóstwa problemów matematycznych z nimi związanych. Wiele miejsca w teorii zajmuje np. zachowanie się rozwiązań. Znaczenie równań bierze się jednak przede wszystkim z ogromu ich zastosowań – których ilustracją mogą być zamieszczone w numerze przykłady.

Równania Newtona

$$(1) \quad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t),$$

są wyrazem II zasady dynamiki. Występująca po prawej stronie siła \vec{F} traktowana jest jako zadana funkcja położenia \vec{r} , prędkości $\dot{\vec{r}}$ i czasu t . Jej konkretna postać zależy od warunków fizycznych, w jakich znajduje się cząstka, której ruch równania te opisują. Fizycznie uzasadnione jest założenie, że funkcja \vec{F} jest regularna, tj. ciągła, gładka itp. W takiej sytuacji ruch cząstki, opisany funkcją $\vec{r} = \vec{r}(t)$, jest określony przez zadanie położenia $\vec{r}(t_0)$ i prędkości $\dot{\vec{r}}(t_0)$ w chwili początkowej t_0 – przynajmniej w pewnym otoczeniu tej chwili.



Równanie oscylatora harmonicznego

$$(2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

jest ogólnym równaniem wszelkich małych drgań wokół położenia równowagi. Opisuje np. małe drgania wahadła zawieszonego na nieważkiej, nierozciągliwej nici; wtedy ω^2 jest stosunkiem przyspieszenia ziemskiego do długości wahadła, a x – kątem między nitką i kierunkiem pionowym. Z równania wynika, że okres drgań wahadła $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g}$ nie zależy od amplitudy drgań. Równanie (2) opisuje również drgania kulki zawieszonyj na sprężynie (wtedy $\omega^2 = k/m$, gdzie k oznacza współczynnik sprężystości sprężyny, a m – masę kulki).

Równanie Hilla

$$(3) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)x = 0,$$

w którym współczynnik ω jest okresową funkcją czasu t , opisuje małe drgania pod wpływem okresowo zmiennej siły lub np. drgania wahadła o okresowo zmieniających się parametrach. W astronomii równania tego typu używane są m.in. do analizy ruchu Księżyca.

Okazuje się, że dla równania Hilla może zachodzić tzw. rezonans parametryczny: ze zjawiskiem tym spotykamy się np. wtedy, gdy za pomocą wychyleń o odpowiednio dobranej częstotliwości udaje się nam rozbujać huśtawkę.

Równania Eulera ciała sztywnego

$$(4) \quad \begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= M_1, \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 &= M_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= M_3, \end{aligned}$$

opisują ruch obrotowy ciała sztywnego. Szukaną wielkością jest tu wektor prędkości kątowej $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, a zadanymi główne momenty bezwładności I_1, I_2, I_3 i wektor momentu siły $\vec{M} = (M_1, M_2, M_3)$. W przypadku $\vec{M} = \vec{0}$ równania te opisują *bąka swobodnego* i wtedy znane są jakościowe cechy rozwiązania, które nie wyraża się na ogół przez funkcje elementarne. Jeśli natomiast $I_2 = I_3$, czyli wtedy, gdy rozważamy przypadek *bąka symetrycznego swobodnego*, nietrudno jest znaleźć rozwiązanie za pomocą funkcji elementarnych.

Równania Hamiltona

$$(5) \quad \dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}, \quad \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l}, \quad l = 1, \dots, f,$$

opisują ruch układu mechanicznego o f stopniach swobody, rozumiany jako ruch punktu-obrazu w $2f$ -wymiarowej przestrzeni fazowej o współrzędnych q_l (tzw. współrzędnych uogólnionych) i p_l (tzw. pędów uogólnionych). Funkcja $H = H(q_l, p_l, t)$ zwana jest hamiltonianem układu.

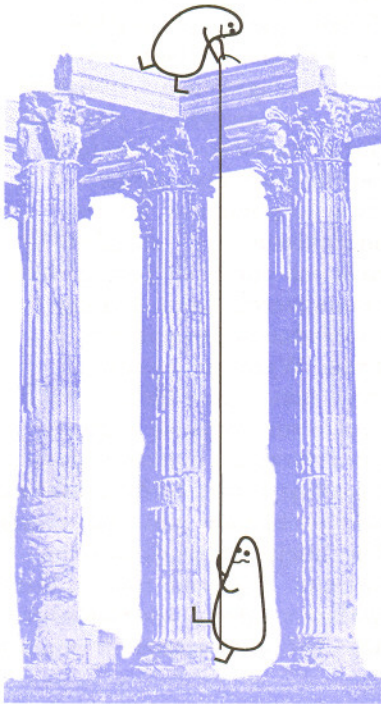
Równanie Hamiltona–Jacobiego

$$(6) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_l, \frac{\partial S}{\partial q_l}, t\right) = 0,$$

jest równaniem różniczkowym cząstkowym, którym często posługujemy się w celu rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych Hamiltona. Interesuje nas przy tym tzw. całka zupełna tego równania, tj. takie jego rozwiązanie $S = S(q_l, t, \alpha_l)$, które zależy w istotny sposób od f parametrów dowolnych α_l , $l = 1, \dots, f$. Jednym z tych parametrów może być energia E , która pojawia się w sytuacji, gdy hamiltonian H nie zależy od czasu, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Szukając rozwiązania równania Hamiltona–Jacobiego w postaci $S = S_0 - Et$, gdzie funkcja $S_0 = S_0(q_l)$ nie zależy od czasu t , otrzymujemy *równanie*

W szczególnym przypadku, gdy $\omega^2(t) = \text{const} \cdot (1 + \varepsilon \cos t)$, gdzie $\varepsilon \ll 1$, równanie (3) nazywane jest równaniem Mathieu.

Rezonans parametryczny polega na tym, że na skutek okresowych zmian parametrów układu położenie równowagi, które jest stabilne przy każdej ustalonej wartości parametru, staje się niestabilne.



Rozwiązanie zadania F 489.
Opór włókna żarówki znacząco rośnie wraz z temperaturą. Podczas pomiaru oporu omomierzem przez żarówkę przepływa stosunkowo niewielki prąd i temperatura jej włókna jest bliska pokojowej. Oczywiście, w normalnych warunkach pracy żarówki temperatura ta jest znacznie wyższa.



$$H\left(q_1, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}\right) = E.$$

Rozwiązanie zadania F 490.

Wystarczy włączyć na parę minut jeden z wyłączników, wyłączyć go, włączyć drugi i przejść do pokoju z żarówkami. Ta, która się świeci, połączona jest z drugim wyłącznikiem. Z pozostałych dwóch żarówek ciepła połączona jest z pierwszym wyłącznikiem, a zimna – z trzecim.

Równanie hipergeometryczne (Gaussa)

$$(7) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(1 + \alpha + \beta)x - \gamma}{x(x-1)} \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha\beta}{x(x-1)} y = 0,$$

gdzie α , β i γ są liczbami rzeczywistymi różnymi od zera, a ponadto γ nie jest liczbą całkowitą, pojawia się, podobnie jak równanie Bessela, w licznych zagadnieniach fizyki matematycznej. Całkowanie wielu równań drugiego rzędu można sprowadzić do całkowania równania Gaussa (proszę np. dokonać w równaniu Legendre’a – patrz niżej – zamiany zmiennej niezależnej $x = 1 - 2t$).

Rozwiązania równania Gaussa wyrażają się przez szeregi hipergeometryczne

$$F_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+(k-1))\beta(\beta+1)\dots(\beta+(k-1))}{k! \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+(k-1))} x^k$$

i są zbadane równie dobrze, jak funkcje sinus i cosinus.

Równanie Legendre’a

$$(8) \quad -\left((1-x^2)P'(x)\right)' + \frac{m^2}{1-x^2}P(x) = l(l+1)P(x), \quad x \in [-1, 1],$$

gdzie m i l są nieujemnymi liczbami całkowitymi, pojawia się np. w końcowym etapie całkowania zagadnienia ruchu elektronu w kulombowskim polu sił o symetrii sferycznej (czyli w matematycznym opisie atomu wodoru), gdy określamy „kątową część” funkcji falowej.

Rozwiązania tego równania dla $m = 0$, tzw. wielomiany Legendre’a, dane są wzorem Rodriguesa:

$$P_l(x) = \frac{1}{l!2^l} \frac{d^l}{dx^l} \left((x^2 - 1)^l \right)$$

– proszę sprawdzić, że wzór ten istotnie określa pewien wielomian stopnia l , który znika na końcach przedziału $[-1, 1]$ i spełnia równanie (8) dla parametru $m = 0$. W ogólnym przypadku rozwiązanie wyraża się wzorem

$$P_{m,l}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, l.$$

Równanie Bessela

$$(9) \quad x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} + (x^2 - \nu^2)u = 0,$$

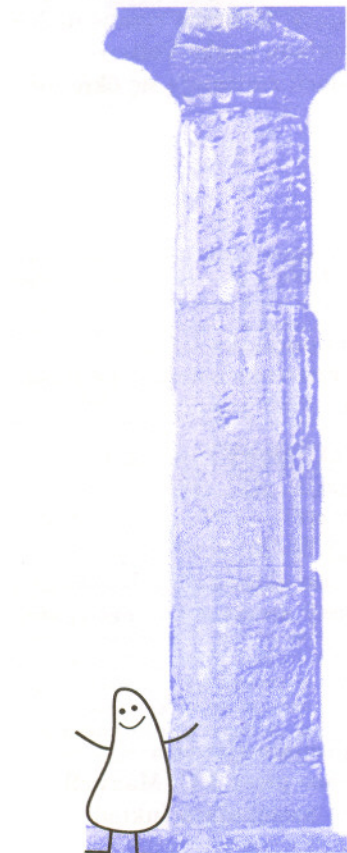
(liczba ν jest parametrem) pojawia się przy okazji rozwiązywania wielu zagadnień w fizyce, astronomii i technice, szczególnie w przypadkach, gdy rozpatrywany problem ma symetrię sferyczną lub cylindryczną. Rozwiązania tego równania, tak zwane funkcje Bessela, są bardzo użytecznymi funkcjami specjalnymi; dzięki nim można wyrazić w jawny sposób np. amplitudę drgającej membrany o kolistym kształcie, wysokość czystych tonów tej membrany czy zmiany temperatury wewnątrz stygnącej, jednorodnej kuli.

Równanie Riccatiego

$$(10) \quad y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

jest jednym z najprostszych równań różniczkowych zwyczajnych, które na ogół nie jest całkwalne za pomocą kwadratur. Oznacza to, że jego rozwiązanie nie wyraża się przez całki nieoznaczone z funkcji P , Q , R ani z funkcji, które można z nich uzyskać, dokonując operacji algebraicznych. Jak udowodnił w XVIII wieku Riccati, w szczególnym przypadku, gdy równanie ma postać

$$(10') \quad y' + ay^2 = bx^m,$$



Kwadratura to staroświecka nazwa całkowania. Wzięła się ona stąd, że całki pierwotnie służyły tylko do mierzenia pól. Starożytni zaś, chcąc ustalić pole jakiejś figury, zamieniali ją na kwadrat.

gdzie a , b i m są stałymi, a liczba $m/(2m + 4)$ jest całkowita, rozwiązania równania (10') wyrażają się przez funkcje elementarne. W XIX wieku Liouville wykazał, że przy wszystkich innych wartościach m równanie (10') nie jest całkowne za pomocą kwadratur.

Równanie Riccatiego jest stosowane do opisu kinetyki reakcji chemicznych, a także w biologii populacyjnej (gdzie nosi nazwę równania Verhulsta). W drugim przypadku funkcje P , Q i R są stałe, przy czym $P < 0$, co odpowiada nieliniowym zmianom liczby narodzin i śmierci w dużych populacjach.

Równania Lotki–Volterra

$$(11) \quad \frac{dz}{dt} = \alpha z - \lambda zr, \quad \frac{dr}{dt} = -\beta r + \mu zr,$$

Ten model matematyczny nazywany jest czasem modelem drapieżnik–ofiara.

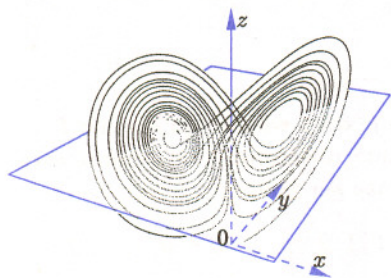
stanowią najprostszy matematyczny model zmian liczebności dwóch rywalizujących ze sobą populacji, rysiów i zajęcy. Zmienna t to czas, r oznacza liczbę rysiów, z – liczbę zajęcy, a α , β , λ i μ są stałymi dodatnimi. Model jest interesujący przede wszystkim z jakościowego punktu widzenia.

Łatwo widzieć, że gdy wcale nie ma rysiów, równania przewidują wykładniczy wzrost liczby zajęcy; jeśli natomiast wcale nie ma zajęcy, to liczba rysiów maleje do zera, również wykładniczo. Typowe rozwiązania układu Lotki–Volterra odpowiadają sytuacji, w której liczebności obu populacji zmieniają się okresowo w dość stabilny sposób.

Układ równań Lorenza

$$(12) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -\sigma x(t) + \sigma y(t), \\ \dot{y}(t) = -x(t)z(t) + rx(t) - y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t)y(t) - bz(t), \end{cases}$$

gdzie σ , r i b są dodatnimi stałymi, był rozważany na początku lat sześćdziesiątych przez amerykańskiego meteorologa, Edwarda Lorenza, podczas jego pionierskich prób numerycznego prognozowania zmian pogody.



Jest to układ dysypatywny: generowany przezeń potok fazowy zmniejsza objętość w przestrzeni fazowej; tzn. jeśli z punktów $(x(0), y(0), z(0))$ zbioru $V_0 \subset \mathbb{R}^3$ „wypuścimy” rozwiązania układu $(x(t), y(t), z(t))$, to dla dowolnego t zbiór $V(t) = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid (x(0), y(0), z(0)) \in V_0\}$ będzie miał objętość mniejszą od V_0 . Dla $\sigma = 10$, $r = 28$ i $b = 8/3$ trajektorie układu przyciągane są przez ograniczony zbiór o dziwnym kształcie, tak zwany atraktor Lorenza (patrz rysunek).

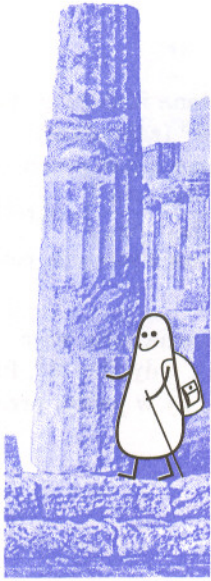
Równania Maxwella

podstawowe równania elektrodynamiki klasycznej, opisujące zjawiska elektromagnetyczne w dowolnym ośrodku, sformułowane przez J.C. Maxwella w latach 60. XIX wieku. Postać równań Maxwella jest następująca (układ jednostek Gaussa):

$$(13) \quad \begin{aligned} (a) \quad & \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \\ (b) \quad & \text{div } \vec{B} = 0, \\ (c) \quad & \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ (d) \quad & \text{div } \vec{D} = 4\pi \rho. \end{aligned}$$

Pole elektromagnetyczne w próżni opisane jest dwiema wielkościami wektorowymi zależnymi od czasu i położenia: natężeniem pola elektrycznego \vec{E} i indukcją magnetyczną \vec{B} . Pola te określone są przez swe działanie na ładunki elektryczne, których konfiguracja opisana jest gęstością ładunku ρ (ładunkiem na jednostkę objętości) i gęstością prądu \vec{j} (ładunkiem przenoszonym w jednostce czasu przez jednostkową powierzchnię, prostopadłą do kierunku ruchu ładunków – tzn. prostopadłą do \vec{j}). Dla opisanego procesów elektromagnetycznych w ośrodkach materialnych, oprócz wektorów \vec{E} i \vec{B} , potrzebne są pomocnicze wielkości wektorowe: indukcja elektryczna \vec{D} i natężenie pola magnetycznego \vec{H} .

Równanie (a) wyraża prawo indukcji Faradaya. Równanie (b) wyraża elementarny fakt empiryczny – brak ładunków magnetycznych. Równanie (c) jest uogólnieniem empirycznego prawa Ampère’a, dotyczącego wzbudzania pola magnetycznego prądem elektrycznym, na pola zależne od czasu; uogólnienie to wyraża przekonanie Maxwella, że zmienne pole elektryczne wzbudza – podobnie jak prąd – pole magnetyczne. Równanie (d), często zwane twierdzeniem Gaussa w formie różniczkowej, jest uogólnieniem prawa Coulomba oddziaływania ładunków elektrycznych.



W próżni, gdy $\vec{D} = \vec{E}$ i $\vec{H} = \vec{B}$, równania Maxwella stanowią układ zamknięty. Należy je rozwiązywać przy zadanych ρ i \vec{j} , spełniających (wynikające z równań Maxwella) równanie ciągłości:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0.$$

Warunki początkowe stanowią pola \vec{E} i \vec{B} zadane w pewnej chwili t_0 i spełniające (w tej chwili) warunki więzów, tj. równania (b) i (d). Równania zawierające pochodne względem czasu (a) i (c) wyznaczają wtedy pola \vec{E} i \vec{B} w pewnym otoczeniu chwili t_0 , przy czym tak wyznaczone pola spełniają warunki więzów (b) i (d) – teraz już wszędzie tam, gdzie są określone.

W ośrodkach materialnych równania makroskopowe (z czterema polami \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} i \vec{H}) są otrzymywane z równań mikroskopowych (z dwoma polami \vec{E} i \vec{B}) przez uśrednienie uwzględniające złożony mechanizm oddziaływania pola elektromagnetycznego z ładunkami ośrodka (teoria elektronowa Lorentza). Związki między polami \vec{D} i \vec{H} a \vec{E} i \vec{B} , zwane związkami materiałowymi (lub równaniami stanu), mają na ogół charakter związków funkcjonalnych, tzn. wartości \vec{D} i \vec{H} w określonym miejscu i czasie zależą nie tylko od wartości \vec{E} i \vec{B} w tym jednym miejscu i w tym jednym czasie, lecz od \vec{E} i \vec{B} rozumianych jako funkcje miejsca i czasu. W związkach tych może np. występować zależność od historii materiału – w takim przypadku mówimy o wystąpieniu zjawiska histerezy, a materiały, które zjawisku temu podlegają, noszą nazwę segnetoelektryków (histereza elektryczna) i ferromagnetyków (histereza magnetyczna). Jednakże dla większości ośrodków izotropowych związki te przybierają prostą funkcyjną (a nie funkcjonalną) postać:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

gdzie $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)$ – przenikalność elektryczna ośrodka, a $\mu = \mu(x, y, z)$ – przenikalność magnetyczna ośrodka. Zwykle te związki materiałowe uzupełniają się polowym prawem Ohma, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (gdzie $\sigma = \sigma(x, y, z)$ jest przewodnictwem właściwym materiału), opisującym zdolność przewodzenia prądu przez nośniki związane w materiale.

W relatywistycznym opisie czasoprzestrzennym, gdy $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$ i $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$, tworzymy tensor pola elektromagnetycznego $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$ o składowych $F_{01} = E_x$, $F_{02} = E_y$, $F_{03} = E_z$, $F_{12} = -B_z$, $F_{23} = -B_x$ i $F_{31} = -B_y$ oraz czterowektor prądu j^μ o składowych $j^0 = c\rho$ i $(j^1, j^2, j^3) = \vec{j}$. Równania Maxwella w próżni zapisują się następująco:

$$\begin{aligned} \text{(a) i (b)} \quad & \partial_\mu F_{\nu\varrho} + \partial_\varrho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\varrho\mu} = 0, \\ \text{(c) i (d)} \quad & \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu, \end{aligned}$$

przy czym $F^{\mu\nu} = g^{\mu\varrho} g^{\nu\sigma} F_{\varrho\sigma}$, gdzie $(g^{\mu\varrho}) = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, jest macierzą metryczną Minkowskiego.

Równanie falowe (d'Alemberta)

$$(14) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 4\pi F(x, t)$$

względnie

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu u = 4\pi F,$$

dla $n = 1$ i 2 opisuje (małe) drgania odpowiednio strun, membran, a dla $n = 3$ – fale akustyczne, a także fale elektromagnetyczne. Parametr c jest prędkością rozchodzenia się fali; funkcja F opisuje źródło fal. Operator różniczkowy stojący po lewej stronie równania nazywamy *operatorem d'Alemberta*.

Dla $n = 3$ i dla $F = 0$ rozwiązania równania falowego spełniają zasadę Huygensa: jeśli $u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ dla wszystkich x spoza pewnego zbioru ograniczonego w \mathbb{R}^3 , to dla dowolnego x_0 istnieje taka chwila t_0 , że $u(x_0, t) = 0$ dla $t > t_0$. Dzięki temu możemy czasem odpocząć w ciszy.

Konwencja sumacyjna i wędrowka wskaźników. Konwencja sumacyjna Einsteina mówi, że jeśli w wyrażeniu jednomianowym pewien wskaźnik występuje dwukrotnie, to rozumie się, iż nastąpiło sumowanie względem tego wskaźnika w całym zakresie, jaki wskaźnik ten przebiega. W naszym atlasie wskaźniki łacińskie przebiegają zakres od 1 do 3, natomiast greckie od 0 do 3. Współrzędne czasoprzestrzenne są oznaczane $x^\mu = ct, x, y, z$. Tensorem metrycznym jest $g_{\mu\nu}$ i (poza hasłem *Równania Einsteina*) różne od zera są tylko jego wyrazy diagonalne, równe odpowiednio: +1, -1, -1, -1. Tensorem odwrotnym jest $g^{\mu\nu}$; jest on zadany równościami $g^{\mu\nu} g_{\varrho\nu} = \delta_\varrho^\mu$ (czyli 0 dla $\mu \neq \varrho$ i 1 dla $\mu = \varrho$). Tensory te służą do „opuszczania” i „podnoszenia” wskaźników według reguł: $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$ oraz $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$.



Równanie Poissona

$$(15) \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -4\pi\rho,$$

pojawia się m.in. w klasycznej elektrodynamice: jeśli zadana funkcja $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest gęstością rozmieszczenia ładunków w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (zakładamy, że ośrodek otaczający ładunki jest próżnią), to rozwiązanie u jest potencjałem pola elektrycznego, a jego gradient, czyli wektor $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right)$, określa natężenie pola. W podobnym kontekście równanie Poissona występuje również w newtonowskiej teorii grawitacji.

Na zewnątrz obszaru naelektryzowanego funkcja ρ jest równa zero, więc potencjał u spełnia tam *równanie Laplace'a* (patrz niżej). Gdy $\Omega = \mathbb{R}^3$, funkcja $u(x) = 1/|x|$ wyraża potencjał elektrostatyczny wytworzony w próżni przez jednostkowy ładunek znajdujący się w punkcie 0.

Równanie Laplace'a

$$(16) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0,$$

opisuje, ogólnie biorąc, stany stacjonarne różnych procesów (dla $n = 3$ funkcja u może być np. temperaturą wewnątrz ciała znajdującego się w stanie równowagi cieplnej – z tego rodzaju sytuacją mamy do czynienia np. przy ogrzewaniu budynków o grubych ścianach, gdy przez dłuższy czas temperatura na zewnątrz i temperatura wewnątrz nie ulegają większym wahaniom).

Funkcje, które spełniają równanie Laplace'a, nazywa się funkcjami harmonicznymi; wewnątrz obszaru, w którym spełnione jest równanie, nie mogą one mieć lokalnych minimów ani maksimów (dowód tego faktu w przypadku $n = 1$ jest banalny).

Żeby równanie Laplace'a miało sens, wystarczy założyć, że funkcja u ma ciągłe drugie pochodne. Okazuje się, że wówczas u ma pochodne wszystkich rzędów, a nawet jest analityczna (tzn. jest sumą swojego szeregu Taylora).

Układ równań Cauchy'ego–Riemanna

$$(17) \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

stanowi warunek konieczny i zarazem dostateczny na to, żeby dwie funkcje u i v (zależne od dwóch zmiennych rzeczywistych x i y) były, odpowiednio, częścią rzeczywistą i urojoną funkcji holomorficznego zmiennej zespolonej $z = x + iy$.

Obie funkcje u i v są funkcjami harmonicznymi: np. różniczkując obie strony pierwszego równania względem x , a drugiego względem y , otrzymamy równości $u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$, z których wynika, że $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Układ Cauchy'ego–Riemanna ma również interpretację hydrodynamiczną. Mianowicie, jeśli rozpatrywać ustabilizowany tzw. płaskorównoległy przepływ cieczy, to wówczas pole prędkości cieczy ma postać $\vec{v} = (u_x, u_y)$, a cząstki cieczy poruszają się wzdłuż linii $v = \text{const}$.

Równanie przewodnictwa cieplnego

$$(18) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + f(x, t),$$

opisuje, dla $n = 3$, zmiany temperatury jednorodnego ciała, w którym gęstość, ciepło właściwe i współczynnik przewodnictwa cieplnego są stałe. Funkcja f jest gęstością rozmieszczenia źródeł ciepła, a poszukiwana temperatura u jest funkcją czasu t i punktu przestrzeni x . To samo równanie opisuje proces dyfuzji gazu oraz zmiany stężenia roztworów.

Rozwiązania *równania falowego* (patrz wyżej) nie mają tej własności: może się okazać, że ich drugie pochodne są funkcjami ciągłymi nigdzie nieróżniczkowalnymi.

Funkcja holomorficznego zmiennej zespolonej to funkcja, która w każdym punkcie swojej dziedziny jest różniczkowalna w sensie zespolonym, albo – równoważnie – jest sumą zbieżnego szeregu potęgowego o współczynnikach zespolonych.

Słowo *płaskorównoległy* oznacza, że wektory prędkości cieczy są styczne do pewnej rodziny płaszczyzn równoległych.

Ten model matematyczny zjawiska jest mocno wyidealizowany: równanie (18) przewiduje np., że początkowy „impuls cieplny” rozchodzi się wewnątrz ośrodka nieskończenie szybko.



Rozwiązanie zadania M 867.

Niech P, R będą punktami na półprostych AC i AD odpowiednio takimi, że $AP = AR = AB$. Niech Q będzie takim punktem, by czworokąt $APQR$ był kwadratem. Wtedy mamy następujące pary przystających trójkątów: $\triangle ABC$ i $\triangle RQD$, $\triangle ABD$ i $\triangle PQC$, $\triangle BCD$ i $\triangle QDC$. Tak więc suma kątów płaskich przy wierzchołku B jest równa

$$\angle PQC + \angle CQD + \angle DQR = \angle PQR = 90^\circ.$$

Przy badaniu zjawiska rozchodzenia się ciepła w cienkiej płycie lub pręcie przyjmuje się na ogół odpowiednio $n = 2$ lub $n = 1$. Jak zauważył Fourier, w drugim przypadku łatwo jest rozwiązać równanie, zakładając, że funkcja u jest sumą szeregu trygonometrycznego. Wyrosła z tego pomysłu cała teoria szeregów Fouriera.

Okazuje się, że gęstość rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej 0 i wariancji $\sqrt{2t}$, czyli funkcja $u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-x^2/4t)$, spełnia równanie przewodnictwa cieplnego – to jedno ze źródeł niebanalnych związków tego równania z teorią prawdopodobieństwa.

Równanie Helmholtza

$$(19) \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + k^2 u = 0,$$

opisuje amplitudę $u(x)$ fali o stałej częstotliwości (proszę sprawdzić, że takie właśnie równanie musi spełniać funkcja u , jeśli $u(x)e^{ickt}$ ma spełniać równanie falowe – patrz wyżej). Równanie to pojawia się w zagadnieniach rozpraszania fal.

W początkach naszego wieku badanie wartości własnych operatora Laplace'a – czyli liczb k^2 , dla których równanie (19) ma w zadanym obszarze Ω niezerowe rozwiązanie, znikające na brzegu tego obszaru – było jednym z motorów rozwoju analizy funkcjonalnej. Okazuje się, że o ile Ω ma gładki brzeg i skończoną objętość, to takie liczby tworzą ciąg, który rośnie do $+\infty$. Ciąg ten jednoznacznie określa np. objętość obszaru Ω , pole powierzchni jego brzegu czy liczbę dziur wewnątrz obszaru, nie określa natomiast kształtu Ω z dokładnością do izometrii. Oznacza to, że nikt nie może określić kształtu bębna wyłącznie ze słuchu.

Równanie telegrafistów

$$(20) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u = 0,$$

gdzie a i b są stałymi, opisuje natężenie prądu, a także natężenie pola elektrycznego postępujących wzdłuż liniowego przewodu.

Równania Eulera dla płynów

$$(21) \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \vec{f},$$

jest jednym z najprostszych i najbardziej podstawowych równań mechaniki ośrodków ciągłych. Wielkościami szukanymi są najczęściej: prędkość płynu \vec{v} , jego gęstość ρ i ciśnienie p , natomiast zadana jest gęstość sił długodystansowych \vec{f} . Równanie Eulera jest rozwiązywane równocześnie z *równaniem ciągłości* (wyrażającym prawo zachowania masy) oraz *równaniem stanu*, $\rho = \rho(p)$. W najprostszym przypadku, gdy płyn się nie porusza, $\vec{v} = 0$, z równań Eulera otrzymujemy *równania hydrostatyki*, $\nabla p = \vec{f}$.

Równania Naviera–Stokesa

$$(22) \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f},$$

opisuje ruch ściśliwego płynu lepkiego. W porównaniu z równaniami Eulera nowym członem jest $\mu \Delta \vec{v}$, gdzie μ jest współczynnikiem lepkości. Równania te należy uzupełnić równaniem ciągłości, wyrażającym prawo zachowania masy, odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi, opisującymi zachowanie płynu na brzegu obszaru ruchu, oraz tak zwanym równaniem stanu, które wyraża związek między ciśnieniem i gęstością płynu. Rozwiązania opisują zarówno laminarny, jak i burzliwy ruch płynu.

Równania Naviera–Stokesa są bardzo szeroko wykorzystywane w fizyce atmosfery i hydrodynamicie.

Uwaga: zapis $\vec{v} \cdot \nabla$ oznacza operator różniczkowy

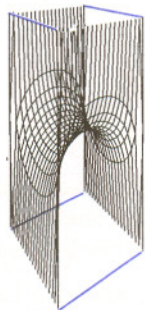
$$(\vec{v} \cdot \nabla) f = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Dla cieczy nieściśliwej równanie stanu ma postać $\rho = \text{const}$, a dla adiabatycznego ruchu gazu mamy $p \rho^{-\kappa} = \text{const}$ (κ jest stosunkiem ciepła właściwego, przy stałym ciśnieniu, do ciepła właściwego, przy stałej objętości, $\kappa = c_p/c_v$).

Równania Cauchy'ego dla płynów

$$(23) \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \operatorname{div} \hat{S} + \vec{f},$$

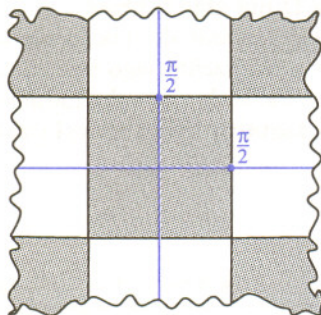
są w teorii ośrodków ciągłych, ze względu na swoją ogólność, odpowiednikami równań Newtona w teorii cząstek. Po ich prawej stronie, obok gęstości sił długodystansowych \vec{f} , występuje dywergencja tensora napięć $\hat{S} = (S_{ij})$, będąca wektorem o składowych $\partial_j S_{ij}$ (konwencja sumacyjna) i reprezentująca gęstość sił kontaktowych. Bogactwo form ośrodków ciągłych odzwierciedlone jest w różnaitości postaci tensora napięć. Gdy tensor napięć jest proporcjonalny do tensora jednostkowego (delt Kroneckera), $S_{ij} = -p\delta_{ij}$, równania Cauchy'ego przechodzą w równania Eulera. Równania Naviera–Stokesa też są ich szczególnym przypadkiem.



Równanie ciągłości

$$(24) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

jest różniczkowym wyrażeniem prawa zachowania wielkości fizycznej, której gęstością jest ρ , a wektorem gęstości prądu jest \vec{j} . Wielkością tą może być np. nierelatywistyczna masa, ładunek elektryczny, energia czy dowolna składowa pędu. W przypadku masy, a więc w mechanice ośrodków ciągłych (gdzie $\vec{j} = \rho \vec{v}$) równanie ciągłości jest niezależne od innych równań dynamicznych. W przypadku ładunku równanie to jest wnioskiem z równań Maxwella, a zarazem warunkiem ich zgodności. Podobnie, ze zlinearyzowanych równań Einsteina wynika równanie ciągłości zapewniające zachowanie energii i pędu.



Powierzchnia Scherka $z = \log \left(\frac{\cos y}{\cos x} \right)$ składa się z jednakowych kawałków w kształcie stromo wygiętych siodeł, które trzeba rozstawić na czarnych polach nieskończonej szachownicy i gładko skleić, dodając w narożach pół pionowe proste.

Równanie powierzchni minimalnych

$$(25) \quad (1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0,$$

opisuje (lokalnie) kształty baniek mydlanych, rozpiętych np. na pogiętej drucianej ramce – powierzchnia błony mydlanej to $z = u(x, y)$, czyli wykres rozwiązania. Powierzchnie minimalne mają zerową średnią krzywiznę: z grubsza biorąc, w każdym punkcie wyglądają tak, jak siodło, „jednakowo wygięte w obu kierunkach”. Więcej informacji o powierzchniach minimalnych można znaleźć w *Delcie* 10/1996.

Rozwiązanie równania (25) postaci $u(x, y) = f(x) + g(y)$ można znaleźć stosunkowo prosto, całkując dwa równania różniczkowe zwyczajne. Opisuje ono tzw. *powierzchnię Scherka* (patrz rysunek na marginesie).

Równanie Liouville'a

$$(26) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = -2e^u,$$

jest warunkiem na to, by dwuwymiarowa metryka Riemanna $e^u dz d\bar{z}$ miała jednostkową krzywiznę. Mimo że jest to równanie nieliniowe, jest ono całkowicie całkowne. Jego rozwiązaniem ogólnym jest $u = -\ln \left((1 + v\bar{v})^{-2} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right)$, gdzie v jest dowolną funkcją holomorficzną zmiennej z .

Równania Einsteina

$$(27) \quad G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

wiążące tensor Einsteina $G_{\mu\nu}$ metryki czasoprzestrzeni $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ z tensorem energii-pędu materii $T_{\mu\nu}$, są podstawowymi równaniami ogólnej teorii względności. Tensor Einsteina $G_{\mu\nu}$ jest zbudowany z tensora metrycznego $g_{\mu\nu}$, jego pierwszych i drugich pochodnych, a nadto zawiera część informacji o krzywiznie czasoprzestrzeni. Pierwszym nietrywialnym rozwiązaniem tych równań było rozwiązanie Schwarzschilda (1916),

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2MG}{c^2 r}} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2),$$



Rozwiązanie zadania M 865.

Niech α będzie kątem między ścianami ABC i BCD , a A' będzie rzutem punktu A na płaszczyznę BCD . Wtedy mamy $S_{ABC} = S_{BCD} \cos \alpha$ oraz $S_{A'BC} = S_{ABC} \cos \alpha$, a po wyrugowaniu $\cos \alpha$ dostajemy $S_{A'BC} = S_{ABC}^2 / S_{BCD}$. Analogicznie wyprowadzamy równości $S_{A'CD} = S_{ACD}^2 / S_{BCD}$ i $S_{A'BD} = S_{ABD}^2 / S_{BCD}$. Dodając trzy otrzymane równości stronami, otrzymujemy, po uwzględnieniu, że $S_{A'BC} + S_{A'CD} + S_{A'BD} = S_{BCD}$, tezę zadania.

będące jedynym rozwiązaniem próżniowym, $T_{\mu\nu} = 0$, w przypadku czasoprzestrzeni sferycznie symetrycznej. W rozwiązaniu tym stała M jest masą gwiazdy będącej źródłem tej sferycznie symetrycznej metryki.

Równania Yanga–Millsa

$$(28) \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} + [A_\nu, F^{\mu\nu}] = 0, \\ F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu],$$

są uogólnieniem próżniowych równań Maxwella w teorii pól cechowania. Punktem wyjścia w teoriach pól cechowania jest pewna grupa Liego, a potencjał A_μ i natężenie pola $F_{\mu\nu}$ przyjmują wartości w algebrze Liego tej grupy, natomiast $[,]$ jest komutatorem w tej algebrze. W najprostszym przypadku, gdy grupą Liego jest grupa obrotów w trzech wymiarach $SO(3)$ (albo grupa $SU(2)$), to wtedy A_μ i $F_{\mu\nu}$ przyjmują wartości w trójwymiarowej przestrzeni (nie mającej bezpośredniego związku z przestrzenią fizyczną), a komutator jest iloczynem wektorowym. Standardowy model oddziaływań między cząstkami elementarnymi jest wyrażony w języku teorii pól z cechowaniem.

Równanie Ernsta

$$(29) \quad (u + \bar{u}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2,$$

jest równaniem na funkcję zespoloną u zależną od dwóch zmiennych rzeczywistych ϱ i z . Do rozwiązania tego równania sprowadza się proces rozwiązywania próżniowych równań Einsteina w sytuacji, gdy pole grawitacyjne jest stacjonarne i osiowo symetryczne (tzn. jest polem obracającej się gwiazdy). Okazuje się, że do tego równania sprowadzają się też tzw. antysamodualne równania Yanga-Millsa w przypadku stacjonarności i osiowej symetrii. Równanie to zalicza się do klasy nieliniowych równań eliptycznych.

Równanie Schrödingera

$$(30) \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} - V\psi = 0,$$

opisuje ruch cząstki kwantowej o masie m w zewnętrznym polu sił, którego potencjałem jest funkcja V (zależna tylko od x). Rozwiązanie ψ nazywamy funkcją falową cząstki; prawdopodobieństwo, że w chwili czasu t cząstka znajduje się w obszarze przestrzeni A , jest proporcjonalne do całki $\int_A |\psi(x, t)|^2 dx$.

Jeśli energia cząstki ma określoną wartość E , to funkcji falowej poszukujemy w postaci $\psi(x, t) = \phi(x) \exp(-iEt/\hbar)$. Funkcja ϕ spełnia wówczas, jak nietrudno sprawdzić, stacjonarne równanie Schrödingera

$$(30') \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} + V\phi = E\phi.$$

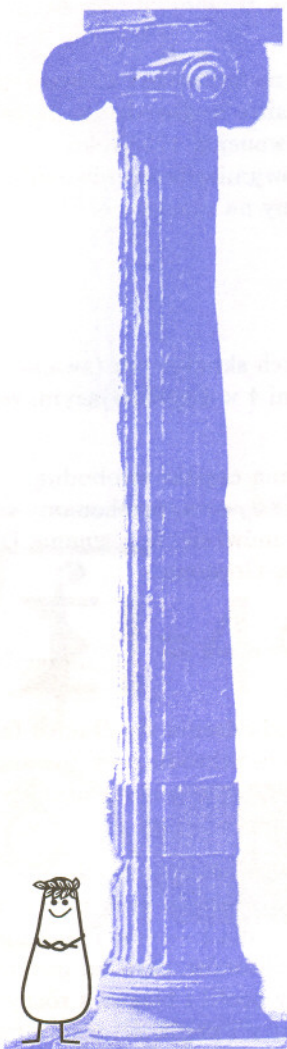
To równanie, podobnie jak równanie Helmholtza, ma nietrywialne rozwiązania na ogół tylko dla niektórych wartości E , co, przynajmniej z matematycznego punktu widzenia, wyjaśnia, dlaczego wartości energii nie zmieniają się w sposób ciągły, tylko są kwantowane.

Równanie Kleina–Gordona

$$(31) \quad (\square + m^2)\psi = 0,$$

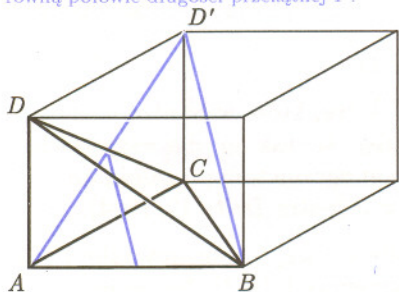
gdzie $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ oznacza operator d'Alemberta (d'Alembertjan),

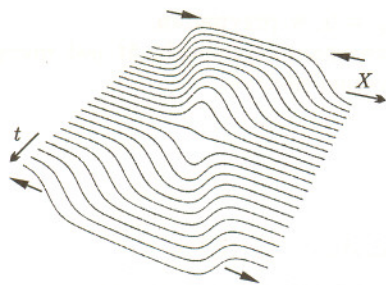
$x_0 = ct$, c jest prędkością światła, było wykorzystywane w pierwszych modelach



Rozwiązanie zadania M 866.

Na czworoboku zbudujemy prostopadłościan P tak, by A, B, C, D były jednocześnie wierzchołkami P . Niech D' będzie wierzchołkiem P przeciwnym do B . Łatwo zauważyć, że odcinek, łączący środki krawędzi AB i CD , łączy tym samym środki boków trójkąta ABD' , a więc jego długość jest równa połowie długości przekątnej BD' prostopadłościanu. Podobnie stwierdzamy, że pozostałe dwa odcinki, łączące środki przeciwnych krawędzi, mają długość równą połowie długości przekątnej P .





kwantowej teorii pola. Funkcja ψ jest funkcją falową swobodnej cząstki relatywistycznej o masie m .

Zastąpienie liniowego składnika $m^2\psi$ ogólniejszym nieliniowym i okresowym składnikiem $m^2 \sin \psi$ prowadzi do tzw. **równania sine'a-Gordona**, które pojawia się np. w nieliniowej teorii pola zaproponowanej w 1958 roku przez Skyrme'a. Wykres jednego z rozwiązań jednowymiarowego równania sine'a-Gordona, $\psi_{tt} - \psi_{xx} + \sin \psi = 0$, jest pokazany na rysunku obok.

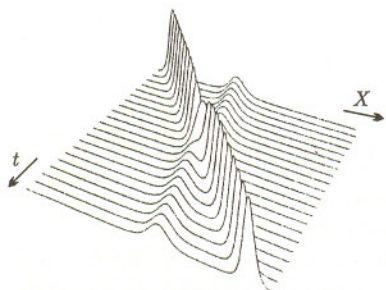
Równanie Diraca

$$(32) \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0,$$

gdzie m jest masą, ψ kolumną o czterech zespolonych składowych (zwaną spinorem), natomiast γ^μ są zespolonymi macierzami 4×4 spełniającymi relacje

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

i zwanymi macierzami Diraca, opisuje relatywistyczną cząstkę swobodną o spinie $\frac{1}{2}$. Działając na to równanie operatorem $i\gamma^\mu \partial_\mu + m$, przekonamy się, że ψ spełnia także równanie Kleina-Gordona, więc mówi się, iż równanie Diraca jest pierwiastkiem kwadratowym z równania Kleina-Gordona.



Łaciński termin *soliton* oznacza odosobnioną falę. Solitony po raz pierwszy zaobserwował w 1834 roku John Scott-Russell:

... barka zatrzymała się nagle, a krągły, gładki, ostro zarysowany wodny garb poruszał się wzdłuż kanału, nie zmieniając w widoczny sposób formy ani prędkości. Rzuciłem się za tą falą konno (...) i po jednej czy dwóch milach pogoni straciłem ją z oczu w zakrętach kanału.

Równanie Kortewega-deVriesa

$$(33) \quad u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

zostało zaproponowane w 1895 roku jako model rozchodzenia się długich fal na płytkiej wodzie. Dziś, obok np. nieliniowego równania Schrödingera, równania Burgersa czy równania sine'a-Gordona, równanie (33) stanowi sztanarowy przykład występowania tak zwanej ukrytej symetrii rozwiązań.

Przed około trzydziestu laty w wyniku eksperymentów numerycznych odkryto (a później ściśle udowodniono) zadziwiającą własność tych rozwiązań równania (33), które w nieskończoności dążą do zera: dla $t \rightarrow +\infty$ i $t \rightarrow -\infty$ każde z nich rozpada się na skończoną liczbę tzw. solitonów, czyli fal postaci $u_j(x, t) = \phi(x - c_j t)$, które mają wyraźnie określony profil i biegną z różnymi prędkościami c_j . Mimo nieliniowości równania kształty i prędkości solitonów nie zmieniają się po zderzeniach z innymi solitonami.

Nieliniowe równanie Schrödingera

$$(34) \quad iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0,$$

pojawia się w fizyce plazmy i tzw. optyce nieliniowej, tzn. w sytuacjach, gdy właściwości optyczne ośrodka zależą od wartości natężenia pola elektrycznego fali świetlnej przechodzącej przez ten ośrodek.

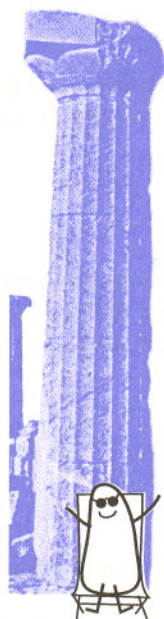
Podobnie jak równanie Kortewega-de Vriesa, nieliniowe równanie Schrödingera również ma rozwiązania solitonowe, postaci $\phi(x - ct)$. Jest ono także jednym z pierwszych równań, dla których w ostatnich latach przeprowadzono stosunkowo dokładną analizę tzw. wybuchów rozwiązań, to znaczy pojawiania się – przy niektórych danych początkowych – osobliwości, które powodują, że rozwiązanie w pewnych punktach przestrzeni nie jest określone dla wszystkich czasów.

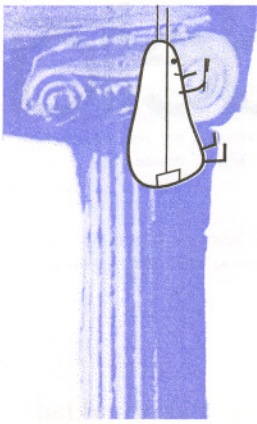
Równanie Mizohaty

$$(35) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + it \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t),$$

to chyba najprostsze równanie różniczkowe cząstkowe, które w bardzo wielu przypadkach nie ma żadnego rozwiązania u – dzieje się tak np. dla wszystkich funkcji f , które są gładkie, znikają poza obszarem ograniczonym, zależą od zmiennej t w sposób parzysty i zerują się dla $t = 0$ (patrz *Delta* 12/1994).

Jeśli chcemy mieć pewność, że rozwiązanie będzie istnieć, to musimy założyć, iż prawa strona, czyli f , jest funkcją analityczną zmiennych (x, t) . Istnienie



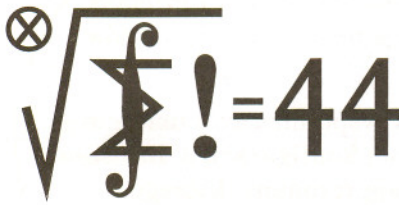


rozwiązania wynika wówczas z twierdzenia Kowalewskiej, a przykład równania Mizohaty dobitnie pokazuje, że w owym twierdzeniu nie można osłabić założeń o analityczności współczynników.

Równanie przekorne Feynmana

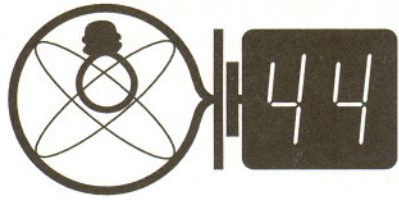
$$(36) \quad U = 0,$$

którego lewa strona jest określona według następującego przepisu. Weź x -ową składową równań Newtona i tak ją uporządkuj, aby po prawej stronie występowało zero; U niech będzie chwilowo równe lewej stronie podniesionej do kwadratu. To samo zrób z y -ową składową równań Newtona, dodając odpowiedni kwadrat do U . Powtarzaj tę procedurę dla z -owej składowej równań Newtona, a potem z kolejnymi składowymi równań Maxwella, Einsteina itd., aż wyczerpiesz te równania fizyki, które uznasz za podstawowe. W ten sposób wszystkie prawa przyrody zunifikujesz w jednym równaniu. Czyżby to było właśnie to, o co chodzi?



Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 1999

Zadania z matematyki nr 371, 372

Redaguje Marcin E. KUCZMA

371. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. Znaleźć wszystkie układy liczb rzeczywistych (x_1, \dots, x_n) spełniające warunki $x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ oraz

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} (\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k+1}}) = 1;$$

w drugiej sumie przyjmujemy $x_{n+1} = 0$.

372. Niech f będzie podobieństwem przestrzeni trójwymiarowej. Dla dowolnego zbioru k zawartego w tej przestrzeni oznaczmy przez k^* zbiór środków wszystkich odcinków XX' , gdzie $X \in k$, $X' = f(X)$. Wykazać, że jeżeli ℓ jest prostą, to zbiór ℓ^* jest zawarty w pewnej prostej oraz że jeżeli π jest płaszczyzną, to zbiór π^* jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.

Zadanie 372 zaproponował pan Henryk Kornacki z Augustowa.

Zadania z fizyki nr 268, 269

Redaguje Jerzy B. BROJAN

268. Cienki pierścień w kształcie okręgu o masie M wisi na nierozciągliwej nici, a dwa koraliki – każdy o masie m – jednocześnie zwolniono w punktach położonych symetrycznie i bardzo blisko punktu najwyższego (rys.). Jeśli koraliki ślizgają się bez tarcia, to ile musi wynosić stosunek m/M , aby pierścień podskoczył?

269. Próbkę izotopu promieniotwórczego emituje promienie α o energii $E = 5$ MeV, a z jednej strony jest osłonięta (tak, że w jednej półprzestrzeni promienie wybiegają na zewnątrz, a w drugiej są pochłaniane). Jaka ilość ciepła wydzielalaby się w osłonie w jednostce czasu, jeśli siła odrzutu działająca na próbkę z osłoną wynosiłaby $F = 1$ N? Pominąć oddziaływanie cząstek α z powietrzem, tzn. przyjąć, że urządzenie działa w próżni. Masa cząstki α jest równa $m = 6,64 \cdot 10^{-27}$ kg = 3730 MeV/c².

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 359 (WT=2,38) i 360 (WT=2,80)
z numeru 4/1998

Tadeusz Józefczyk	– Poznań	40,64
Witold Bednarek	– Łódź	38,26
Zbigniew Skalik	– Pyskowice	36,72
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	33,83

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 260 (WT=2,43) i 261 (WT=1,68)
z numeru 6/1998

Przemysław Gadziński	– Środa Śląska	45,81
Jarosław Łazuka	– Warszawa	34,24
Marek Wójcicki	– Szczecin	32,15
Tomasz Wietecha	– Tarnów	26,49
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	25,64
Aleksander Surma	– Myszków	15,46

Pan Gadziński obok wielokrotnych laurów ligi matematycznej zdobył także członkostwo **Klubu 44 F**.

