12/98 (12)

$\Gamma \lim_{n\to\infty}$atias

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (10′)

Wyjaśnienie oszustwa (10): Niech $T=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\frac{7}{4}n]}{2^n}$. Nietrudno wykazać, że wtedy $T=\frac{44}{15}$.

Ponieważ zaś $\sqrt[8]{88}=1{,}7500898\ldots$, to $[\frac{7}{4}n]=[\sqrt[8]{88}n]$ dla małych wartości n. Mówiąc dokładniej, w sumie $S-T=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\sqrt[8]{88}n]-[\frac{7}{4}n]}{2^n}$ pierwszy niezerowy składnik występuje dla $n=2785$.

Dokładne obliczenia pokazują, że

$$S=2{,}93333\ldots 33333333789885911304\ldots,$$

gdzie cyfra 7 pojawia się na 839-tym miejscu po przecinku. Liczba S jest zatem trochę większa od $\frac{44}{15}$.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (11′)

Wyjaśnienie oszustwa (11): Obydwie metody całkowania są poprawne, a uzyskane wyniki różnią się o stałą $\frac{1}{8}\ln 4$, która jest i tak pochłonięta przez stałą całkowania.

JWR

PRAWIE ZAWSZE (3)

TWIERDZENIE: Niech (a_n) będzie ciągiem określonym następująco:
$a_1=a_2=1$ oraz $a_{n+2}=a_{n+1}+10a_n$ dla $n\geq 1$.
Początkowymi wyrazami ciągu są więc 1, 1, 11, 21, 131, 341, 1651, 5061, 21571, 72181, 287891,..., a każdy kolejny wyraz powstaje przez pisemne dodanie dwóch poprzednich wyrazów, tylko trochę niedbale zapisanych, bo przesuniętych o jedno miejsce dziesiętne względem siebie:

$$\begin{array}{lrcr} & 10\times a_{10} & = & 72181\\ + & a_{11} & = & 287891\\ \hline & a_{12} & = & 1009701\end{array}$$

Wtedy dla prawie dowolnej liczby pierwszej p zachodzi podzielność $p|a_{p^2-1}$.

Prawie dowolna liczba pierwsza to w tym twierdzeniu liczba pierwsza różna od 2, 5 i 41.

Dowód: Każdy wyraz ciągu (a_n) przy dzieleniu przez 10 daje resztę 1, więc teza rzeczywiście jest fałszywa dla $p=2$ i $p=5$.

Można wykazać, że
$a_n=\frac{1}{2^n\cdot\sqrt{41}}\left((1+\sqrt{41})^n-(1-\sqrt{41})^n\right)$. Niech p będzie liczbą pierwszą różną od 2 i 5. Można wykazać, że jeśli m_p jest taką najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią, że $p|a_{m_p}$, to $p|a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m_p|n$. Bezpośrednio obliczamy, że $m_{41}=41$, zatem $41|a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $41|n$. Stąd jasno wynika, że teza jest fałszywa również dla $p=41$.

Niech teraz $p\neq 41$. Możliwa jest jedna z dwóch sytuacji: $41^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \pmod p$ lub $41^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \pmod p$, bo $p|41^{p-1}-1=\left(41^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(41^{\frac{p-1}{2}}+1\right)$ – małe twierdzenie Fermata.

Pierwszy przypadek ma miejsce, gdy p dzieli się przez 41 z resztą 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 31, 32, 33, 36, 37, 39 lub 40.

Wtedy $(1+\sqrt{41})^{p-1}=\frac{(1+\sqrt{41})^p}{1+\sqrt{41}}=\frac{\sqrt{41}-1}{40}(1+\sqrt{41})^p\equiv$
$\equiv\frac{\sqrt{41}-1}{40}(1^p+\sqrt{41}^p)=\frac{\sqrt{41}-1}{40}(1+\sqrt{41}\cdot 41^{\frac{p-1}{2}})\equiv$
$\equiv\frac{\sqrt{41}-1}{40}(1+\sqrt{41})=1 \pmod p$, gdzie kongruencje wśród liczb postaci $a+b\sqrt{41}$ należy rozumieć następująco: $a+b\sqrt{41}\equiv c+d\sqrt{41} \pmod p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c-a$ i $d-b$ są podzielne przez p. Nie należy się też martwić liczbami względnie pierwszymi z p pojawiającymi się w mianowniku (zob. Prawie Zawsze (2) w Γ-limatiasie (10)).

Podobnie $(1-\sqrt{41})^{p-1}\equiv 1 \pmod p$.
Stąd $a_{p-1}\equiv 0 \pmod p$, co daje $p|a_{p^2-1}$.

Drugi przypadek ma miejsce, gdy p dzieli się przez 41 z resztą 3, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 34, 35 lub 38.

Wtedy $(1+\sqrt{41})^{p+1}=(1+\sqrt{41})^p(1+\sqrt{41})\equiv$
$\equiv(1^p+\sqrt{41}^p)(1+\sqrt{41})=(1+\sqrt{41}\cdot 41^{\frac{p-1}{2}})(1+\sqrt{41})\equiv$
$\equiv(1-\sqrt{41})(1+\sqrt{41})=-40\equiv 1 \pmod p$.

Podobnie $(1-\sqrt{41})^{p+1}\equiv 1 \pmod p$, skąd $p|a_{p+1}$, co daje $p|a_{p^2-1}$.

Widzimy więc, że dla p różnego od 2, 5 i 41 liczba $a_{p\pm 1}$ dzieli się przez p, przy czym znak $\pm$ zależy od tego, czy 41 jest resztą czy nieresztą kwadratową *modulo* p. Tym samym m_p musi być dzielnikiem liczby $p\pm 1$. Liczby m_p dla początkowych liczb pierwszych p podane są w poniższej tabelce:

p	$p\pm 1$	m_p	p	$p\pm 1$	m_p	p	$p\pm 1$	m_p
3	4	4	101	102	34	227	228	228
7	8	4	103	102	51	229	230	230
11	12	3	107	106	106	233	234	18
13	14	7	109	110	110	239	240	240
17	18	18	113	112	16	241	240	8
19	20	10	127	126	7	251	250	125
23	22	11	131	130	5	257	258	86
29	30	10	137	138	138	263	264	132
31	30	6	139	138	23	269	268	268
37	36	9	149	150	150	271	270	90
41	–	41	151	152	152	277	276	138
43	42	14	157	158	79	281	282	141
47	48	12	163	162	162	283	282	282
53	54	9	167	168	84	293	294	21
59	58	29	173	172	43	307	306	102
61	60	60	179	180	45	311	312	312
67	68	68	181	182	182	313	314	314
71	72	72	191	192	192	317	318	159
73	72	72	193	194	194	331	332	166
79	80	80	197	196	14	337	336	16
83	82	82	199	200	200	347	348	116
89	90	45	211	212	53	349	348	116
97	98	98	223	222	111	353	352	32

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl