Trzy rozwiązania zadania o 101 liczbach (5/1974)

Aleksander PEŁCZYŃSKI

W bieżącym roku szkolnym odbywa się w naszym kraju XXV Olimpiada Matematyczna. Miał więc być artykuł „na zamówienie". Powstało coś, co od biedy mogłoby się nadawać na 26 rocznicę. Trudnym i ważnym obowiązkiem Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej jest wybór zadań na zawody. Proponowane zadanie nie może być znane, np. wzięte z jakiegoś dostępnego zbioru zadań; nie może być ani za łatwe, ani za trudne; powinno posiadać kilka różnych rozwiązań, które dadzą się zredagować jak najkrócej. Wreszcie do zrozumienia i do rozwiązania zadania powinna wystarczać znajomość matematyki w zakresie programu szkoły średniej; a najlepiej, gdy zadanie nie wymaga żadnej wiedzy szkolnej, tak że jest ono jednakowo dostępne i dla ucznia szkoły podstawowej, i dla członka rzeczywistego Polskiej Akademii Nauk. Podobnie, jak nie spotyka się w życiu idealnych ludzi i przedmiotów, tak też nie ma prawdopodobnie idealnych zadań. Opowiem historię związaną z pewnym zadaniem bliskim idealnego, gdyby nie to, że okazało się ono trochę za trudne.

W 1950 roku, jako student I roku matematyki, przeczytałem w czasopiśmie *Matiematika w Szkole* sprawozdanie z XIII Moskiewskiej Olimpiady Matematycznej. Jedno z zadań finałowych brzmiało: „Liczby od 1 do 101 wypisano w dowolnym porządku. Udowodnić, że można z tych 101 liczb wykreślić 90 tak, aby pozostałych 11 tworzyło ciąg monotoniczny, tzn. albo ciąg malejący, albo rosnący".

Rozwiązania nie podano. Ze sprawozdania wynikało, że zadanie to rozwiązał tylko jeden uczestnik zawodów.

Dla kilku moich kolegów z pierwszego roku matematyki i dla mnie oznaczało to wyzwanie. My też potrafimy rozwiązać to zadanie. Niestety, chęci nie wystarczą. Mimo usilnych rozmyślań, a następnie zbiorowych dyskusji i dzielenia się doświadczeniem upragniony pomysł nie przychodził i zadanie pozostało nie rozwiązane nie tylko w ciągu kilku godzin (tj. czasu przeznaczonego na rozwiązanie w czasie zawodów), ale też wiele dni i tygodni. Stwierdziliśmy jedynie, że liczby 101 nie można zastąpić żadną liczbą mniejszą, gdyż np. ciąg 100 liczb

$$91, 92, \ldots, 99, 100, 81, 82, \ldots, 89, 90, \ldots, 1, 2, \ldots, 9, 10$$

nie zawiera podciągu monotonicznego składającego się z więcej niż 10 wyrazów (dlaczego? – porównaj dalej rozwiązanie I (3)). Ktoś zauważył jednak, że zadanie można prawdopodobnie uogólnić na dowolne liczby naturalne postaci n^2+1. Sprawdziliśmy, że tak jest dla liczby $5 = 2^2+1$ i liczby $10 = 3^2+1$. Dla ciągów siedemnastowyrazowych $17 = 4^2+1$ zgubiliśmy się w rachunkach. Zaczęliśmy opowiadać o zadaniu „o stu jeden liczbach" rozmaitym ludziom. Między innymi napisałem list do Poznania do kolegi X, laureata I Olimpiady Matematycznej, a jeden z moich kolegów zaznajomił z treścią zadania nieodżałowanego profesora Stefana Kulczyckiego (1893–1960). Oba te kontakty dały pożądany efekt. Z Poznania przyszedł list zaczynający się od słów:

Drogi Olku!

Nie dziwię się, że zadanie o stu jeden liczbach rozwiązał w Moskwie tylko jeden zawodnik, a wy w Warszawie nie potrafiliście go zrobić, skoro ja zużyłem na rozwiązanie pełne sześć godzin.

Ten dowód skromności autora był jednak poparty pięknym, choć skomplikowanym, rozwiązaniem zadania, niewiele różniącym się od rozwiązania przysłanego nam równocześnie przez profesora Kulczyckiego.

Rozwiązanie I (kolegi X)

Udowodnimy indukcyjnie, że dla każdej liczby naturalnej n, z dowolnego ciągu n^2+1 różnych liczb naturalnych, można wykreślić n^2-n liczb tak, że pozostałe $n+1$ liczb tworzy ciąg monotoniczny. Dla $n=1$ jest to oczywiste. Załóżmy prawdziwość hipotezy indukcyjnej dla pewnego $k \geq 1$ i niech $a_1, a_2, \ldots, a_{(k+1)^2+1}$ będzie dowolnym ciągiem różnych liczb naturalnych. Należy pokazać, że ciąg ten zawiera $(k+2)$-wyrazowy podciąg monotoniczny. Na mocy założenia indukcyjnego wśród liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{k^2+1}$ istnieją liczby $a_{n_1^1}, a_{n_2^1}, \ldots, a_{n_{k+1}^1}$, gdzie $n_1^1 < n_2^1 < \ldots < n_{k+1}^1$, tworzące ciąg monotoniczny. Niech a_{s_1} będzie największą z liczb $a_{n_1^1}, a_{n_2^1}, \ldots, a_{n_{k+1}^1}$. Rozpatrzmy ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{k^2+2}$ z wykreślonym wyrazem a_{s_1}, tzn. ciąg $b_1, b_2, \ldots, b_{k^2+1}$, gdzie $b_i = a_i$ dla $i < s_1$ oraz $b_i = a_{i+1}$ dla $i \geq s_1$. Stosując powtórnie założenie indukcyjne, znajdujemy ciąg monotoniczny $a_{n_1^2}, a_{n_2^2}, \ldots, a_{n_{k+1}^2}$ i oznaczamy przez a_{s_2} jego największy wyraz. Ponownie stosujemy założenie indukcyjne do ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_{k^2+3}$ z wykreślonymi wyrazami a_{s_1} oraz a_{s_2} i wyznaczamy a_{s_3} itd. Ponieważ $(k+1)^2+1 = k^2+(2k+2)$, to możemy tak postępować $2k+2$ razy. Otrzymujemy w ten sposób $2k+2$ różnych liczb $a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots, a_{s_{2k+2}}$. W zależności od tego, czy są one końcowymi wyrazami ciągów rosnących o długości $k+1$, czy też pierwszymi wyrazami ciągów malejących o długości $k+1$, zaliczamy je do pierwszej bądź do drugiej grupy. Niech do pierwszej grupy należą liczby $A_1, A_2, \ldots, A_q$, zaś do drugiej $B_1, B_2, \ldots, B_{2k+2-q}$, przy czym numerujemy je w ramach każdej grupy w takiej samej kolejności, w jakiej występują w ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_{(k+1)^2+1}$. Rozpatrzymy teraz kilka przypadków.

(1) Ciąg $A_1, A_2, \ldots, A_q$ nie jest malejący, tzn. istnieje taki wskaźnik t, że $A_t < A_{t+1}$. Niech $A_t = a_{n_{k+1}^l}$, zaś $A_{t+1} = a_{n_{k+1}^r}$. Wówczas ciąg $a_{n_1^l}, \ldots, a_{n_{k+1}^l}, a_{n_{k+1}^r}$ jest podciągiem rosnącym ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_{(k+1)^2+1}$ złożonym z (k+2) wyrazów.

(2) Ciąg $B_1, B_2, \ldots, B_{2k+2-q}$ nie jest rosnący. Analogiczne rozumowanie jak w (1) prowadzi do konstrukcji $(k+2)$-wyrazowego podciągu malejącego ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_{(k+1)^2+1}$.

(3) Nie zachodzi ani (1), ani (2) oraz $q \neq k+1$. Wówczas szukanym monotonicznym (k+2)-wyrazowym podciągiem jest albo ciąg $A_1, A_2, \ldots, A_{k+2}$ – gdy $q \geq k+2$, albo ciąg $B_1, B_2, \ldots, B_{k+2}$ – gdy $q \leq k$.

(4) Nie zachodzi ani (1), ani (2) oraz $q = k+1$. Rozpatrzmy podprzypadki:

(4a) Istnieje taki wskaźnik t, że $B_t = a_{n_1^p}$ występuje w ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_{(k+1)^2+1}$ po wyrazie $A_1 = a_{n_{k+1}^h}$, tzn. $n_{k+1}^h < n_1^p$. Wówczas, jeśli $A_1 > B_t$, to szukanym $(k+2)$-wyrazowym ciągiem jest malejący ciąg $a_{n_{k+1}^h}, a_{n_1^p}, a_{n_2^p}, \ldots, a_{n_{k+1}^p}$, jeśli zaś $A_1 < B_t$, to szukanym ciągiem jest ciąg rosnący $a_{n_1^h}, a_{n_2^h}, \ldots, a_{n_{k+1}^h}, a_{n_1^p}$.

(4b) Nie zachodzi (4a). Wówczas wyrazy obu grup razem występują w ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_{(k+1)^2+1}$ w następującej kolejności:
$B_1, B_2, \ldots, B_{k+1}, A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ i szukanym monotonicznym $(k+2)$-wyrazowym ciągiem jest albo ciąg rosnący $B_1, B_2, \ldots, B_{k+1}, A_1$, gdy $B_{k+1} < A_1$, albo ciąg malejący $B_{k+1}, A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ – gdy $B_{k+1} > A_1$.

Pokazaliśmy więc, że z założenia indukcyjnego wynika, iż w każdym przypadku z ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_{(k+1)^2+1}$ można wybrać podciąg monotoniczny złożony z $(k+2)$ wyrazów. ■

Rozwiązanie profesora Kulczyckiego różniło się od wyżej przytoczonego tym, że najpierw wykreślało się największy wyraz ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_{(k+1)^2+1}$, a następnie – jak w dowodzie kolegi X – stosowało się $(2k+1)$ razy założenie indukcyjne dla wybrania $(2k+1)$ największych wyrazów pewnych ciągów monotonicznych $(k+1)$-wyrazowych i dalej przeprowadzało się analogiczną dyskusję (jak?).

Na tym kończy się pierwsza część opowiadania. Tych, którzy „wysiedli" przy czytaniu I rozwiązania, pragnę pocieszyć: nie jest ono konieczne do zrozumienia reszty. Dyskutując nad pierwszym rozwiązaniem, doszliśmy do wniosku, że jest ono za trudne, aby organizatorzy Moskiewskiej Olimpiady, znając jedynie to rozwiązanie, zdecydowali się wybrać zadanie o stu jeden liczbach na zawody. Musiało więc istnieć inne, prostsze rozwiązanie. Istotnie tak było. W maju 1951 roku późnym wieczorem, po wykładzie z propedeutyki filozofii, kolega Stefan Rolewicz oznajmił nam, że właśnie na tym wykładzie znalazł nowe rozwiązanie. Rozwiązanie Stefana Rolewicza, obecnego kierownika Zakładu Analizy Matematycznej Instytutu Matematyki Polskiej Akademii Nauk, nie różniło się istotnie od rozwiązania autorów zadania. Mogliśmy się o tym przekonać, gdy wkrótce potem dotarła do Warszawy książka D.O. Szkolskiego, G.M. Adelsona Welskiego, N.N. Czencowa, A.M. Jagłoma, I.M. Jagłoma *Izbrannyje zadaczi i tieoriemy elementarnoj matiematiki. Czast' 1. Arifmietika i algebra*, Moskwa 1950 (patrz str. 117–118).

Rozwiązanie II (autorów i S. Rolewicza)

Niech $a_1^{(1)}$ – pierwsza (pierwsza z lewej) z wypisanych liczb, $a_2^{(1)}$ – pierwsza z pozostałych liczb, większa niż $a_1^{(1)}$, $a_3^{(1)}$ – pierwsza z liczb występujących po $a_2^{(1)}$, większa niż $a_2^{(1)}$, itd. W ten sposób wybieramy ciąg rosnący liczb $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_{i_1}^{(1)}$.

Jeżeli $i_1 > 10$, to postępowanie nasze jest zakończone. Jeżeli $i_1 \leq 10$, to wykreślamy wszystkie już wybrane liczby, zaś z pozostałych $(101 - i_1)$ liczb wybieramy dokładnie w taki sam sposób nowy ciąg rosnący $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_{i_2}^{(2)}$.

Kontynuując to postępowanie, wybierzemy z naszego ciągu 101 liczb pewną ilość rozłącznych ciągów rosnących. Jeżeli choć jeden z tych ciągów ma więcej niż 10 wyrazów, to znowu postępowanie nasze jest zakończone. Zatem należy jeszcze rozpatrzyć przypadek, gdy każdy z wybranych ciągów ma nie więcej niż 10 wyrazów. Ponieważ wyjściowy ciąg zawiera 101 wyrazów, to w tym przypadku liczba k wybranych ciągów rosnących jest nie mniejsza niż 11. W tym przypadku określimy ciąg malejący, który składa się z co najmniej 11 wyrazów.

Ostatnim wyrazem tego ciągu będzie liczba $a_{i_k}^{(k)}$, to jest ostatni wyraz ostatniego z wybranych ciągów rosnących. Następnie wybierzemy liczbę z przedostatniego z wybranych ciągów, położoną na lewo od $a_{i_k}^{(k)}$ i najbliższą do $a_{i_k}^{(k)}$. Ta liczba jest większa niż $a_{i_k}^{(k)}$, gdyż w przeciwnym razie w trakcie konstrukcji przedostatniego z ciągów rosnących wybralibyśmy po tej liczbie liczbę $a_{i_k}^{(k)}$, podczas gdy w istocie liczba $a_{i_k}^{(k)}$ znalazła się w następnym z ciągów rosnących.

Dokładnie w taki sam sposób znajdujemy wyraz z trzeciego od końca z ciągów rosnących, leżący na lewo od wybranego wyrazu z przedostatniego z ciągów rosnących i leżący najbliżej tego wyrazu itd. W ten sposób konstruujemy ciąg liczb, które rosną, jeśli je rozpatrywać w porządku od prawej do lewej, tzn. ciąg malejący. Liczba wyrazów tego ciągu równa się liczbie k wybranych wcześniej ciągów rosnących, a więc jest nie mniejsza niż 11. ■

Kto nie zrozumiał II rozwiązania, ma jeszcze jedną szansę. Mniej więcej dwadzieścia lat później kolega Andrzej Mąkowski zakomunikował mi „prościutkie" rozwiązanie zadania o stu jeden liczbach, pochodzące od znakomitego matematyka węgierskiego, profesora P. Erdősa. Oto ono:

Rozwiązanie III (Erdősa)

Wyrazowi a_k ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$ różnych liczb naturalnych przyporządkujemy dwie liczby naturalne: $r(k)$ oraz $m(k)$, gdzie $r(k)$ jest długością (= ilością wyrazów) najdłuższego rosnącego ciągu $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_{r(k)}}$, którego a_k jest końcem (to znaczy $k = n_{r(k)}$), zaś $m(k)$ jest długością najdłuższego ciągu malejącego, którego a_k jest początkiem. Należy pokazać, że dla pewnego k $(1 \leq k \leq 101)$ co najmniej jedna z liczb $r(k)$ lub $m(k)$ jest ≥ 11. Załóżmy, że tak nie jest, to znaczy, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots, 101$ mamy $1 \leq r(k) \leq 10$ oraz $1 \leq m(k) \leq 10$. Ponieważ różnych par liczb naturalnych ≤ 10 jest 100, więc istnieją wskaźniki s oraz t, takie, że $1 \leq s < t \leq 101$ oraz $r(s) = r(t)$ i $m(s) = m(t)$. Ale jeśli $a_s < a_t$, to łatwo widać, że $r(s) < r(t)$, jeśli zaś $a_s > a_t$, to $m(t) > m(s)$. (Dlaczego?). Otrzymana sprzeczność kończy dowód. ■

Analizując rozwiązanie III, dochodzimy do następującego uogólnienia twierdzenia o stu jeden liczbach.

TWIERDZENIE. *Dany jest ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$ różnych liczb naturalnych. Wówczas $m \cdot r \geq n$, gdzie m jest długością najdłuższego malejącego podciągu ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$, zaś r – długością najdłuższego rosnącego podciągu tego ciągu.*

Nie wiem, czy fakt ten można udowodnić, stosując metody rozwiązań I lub II.

Następujące twierdzenie, pochodzące od jednego z najwybitniejszych polskich matematyków, Wacława Sierpińskiego (1882–1969), można uznać za analog dla ciągów nieskończonych faktu, że każdy (n^2+1)-wyrazowy ciąg zawiera $(n+1)$-wyrazowy ciąg monotoniczny.

TWIERDZENIE. *Z każdego nieskończonego ciągu liczbowego można wybrać nieskończony podciąg monotoniczny.*

Proponuję Czytelnikowi zastanowić się nad dowodem tego twierdzenia.

Kończąc ten artykuł, chciałbym jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że nie jest rzeczą łatwą ocenić *a priori* stopień trudności jakiegoś zadania. Wyjaśnię to na przykładzie zadania o stu jeden liczbach. Sądzę, że gdyby to zadanie zaproponowano na posiedzeniu naszego Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej, znając jedynie I rozwiązanie, to na pewno by je odrzucono; gdybyśmy znali II rozwiązanie, to być może zakwalifikowalibyśmy je na zawody, ale jako zadanie trudne. Natomiast znając III rozwiązanie, moglibyśmy zakwalifikować to zadanie jako średnio trudne.