Rozwiązanie zadania M 863.
Rozpatrzmy ciąg $\{y_n\}$ „sprzężony" do $\{x_n\}$, tzn. $y_n = (a - b\sqrt{d})^n$. Łatwo sprawdzić, że wtedy $y_n = k_n - l_n\sqrt{d}$. Ponieważ liczby a, b są dodatnie, więc mamy $\left|\frac{a-b\sqrt{d}}{a+b\sqrt{d}}\right| < 1$ i dlatego ciąg $\frac{y_n}{x_n} = \left(\frac{a-b\sqrt{d}}{a+b\sqrt{d}}\right)^n$ dąży do zera. Mamy stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2k_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + y_n}{x_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 1$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2l_n\sqrt{d}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - y_n}{x_n} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 1,$$

czyli ostatecznie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{k_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{2k_n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{2l_n}} = \sqrt{d}.$$

Tylko że przy każdym z tych przeformułowań *treść* zadania staje się cięższa, traci elegancję. I wracamy do tytułu snutych rozważań (piękne brzydkie). Co lepsze? Ładna treść, brzydkie rozwiązanie? Ładne rozwiązanie, brzydka treść? Dylemat: coś za coś. Zręcznego wyjścia nie widzę. Ale faktem jest, że w materiale dla Jury, opracowanym przez naszą komisję, „problem małych n" został zasygnalizowany nie dość wyraziście.

Na koniec jeszcze kilka uwag. Trzymajmy się oznaczenia $g(n) = \log_2 f(2^n)$. W zadaniu należy dowieść, że $\frac{1}{4}n^2 < g(n) < \frac{1}{2}n^2$. Jest to typowe zagadnienie estymacyjne. Między prawą i lewą stroną jest ogromna przepaść. Jak można poprawić dolne oszacowanie, pokazuje nierówność (5); zgodnie ze zwyczajami przyjętymi w badaniach asymptotycznych nie zwracamy już teraz uwagi na żaden początkowy skończony odcinek ciągu $g(n)$. Oszacowanie górne (uznane na wstępie za część tezy zasługującą na mniej uwagi) także można poprawiać. Potrafię, na przykład, pokazać, że

$$\tfrac{1}{2}n^2 - n\log_2 n + An < g(n) < \tfrac{1}{2}n^2 - n\log_2 n + Bn,$$

gdzie $A = \log_2 \mathrm{e} - \frac{1}{2}$, $B = \log_2(3\mathrm{e}) - \frac{1}{2}$.

W problemach estymacyjnych nie ma czegoś takiego, jak „najlepszy rezultat" – chyba że uda się znaleźć *dokładny wzór* dla wyrazów ciągu; ale wtedy to już nie jest zagadnienie estymacyjne. Każde poprawienie oszacowania, czy to dolnego, czy górnego, może być znaczącym postępem. Byłbym bardzo zainteresowany wiadomością o tym, że w napisanej wyżej nierówności podwójnej da się zwiększyć stałą A lub zmniejszyć stałą B. A jeszcze lepiej, gdyby udało się je zrównać – tak, by „rozwarcie nożyc" zeszło do poziomu wyrazów rzędu niższego niż $C \cdot n$. Drodzy Czytelnicy: to kolejne „małe zadanko"!

Rozwiązanie zadania M 864.
Mamy

$$a_n^2 = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2} = \frac{1\cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+1}.$$

Stąd wynika już, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pożytek z funkcji stałej

Funkcja stała na przedziale ma w nim, jak wiadomo, pochodną stale równą zeru; co więcej, funkcja, która ma w przedziale pochodną stale równą zeru, jest w tym przedziale stała. Czy tak oczywiste fakty mogą być przydatne? Mogą.

Załóżmy, że mamy funkcję f z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$, wszędzie różniczkowalną i równą swojej pochodnej oraz przyjmującą dla $x = 0$ wartość 1. Wykażemy, że tą funkcją musi być e^x. W tym celu obliczmy pochodną funkcji $g(x) = f(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$. Ze wzoru na pochodną iloczynu otrzymujemy

$$g'(x) = f'(x) \cdot \mathrm{e}^{-x} - f(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}.$$

Ale $f' = f$, więc $g'(x) = 0$ dla każdego x w $\mathbb{R}$. Funkcja $g(x)$ jest więc stała, po podstawieniu $x = 0$ (pamiętamy, że $f(0) = 1$) stwierdzamy, że jej jedyną wartością jest 1, a stąd już widać gołym okiem, że $f(x) = \mathrm{e}^x$. Lekkie, łatwe i przyjemne.

Spróbujmy dalej. Niech f i g będą funkcjami różniczkowalnymi w $\mathbb{R}$, takimi, że $f' = -g$, $g' = f$, $f(0) = 1$ i $g(0) = 0$. Domyślasz się, Czytelniku, o kim mowa? Jeśli nie (a nawet jeśli tak), zacznij od wykazania, że funkcja $h(x) = (f(x) - \cos x)^2 + (g(x) - \sin x)^2$ jest stała. Reszta to już drobiazg.

Można by powiedzieć za Archimedesem: dajcie mi funkcję stałą, a udowodnię wszystko!

W.B.