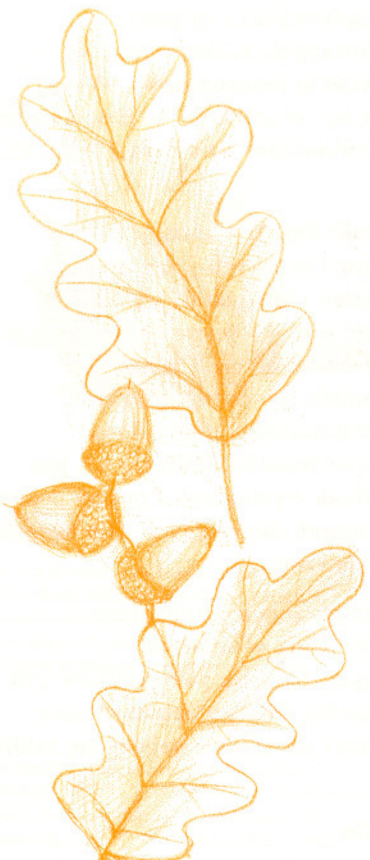
Piękne brzydkie zadanie

Marcin E. KUCZMA

Piękne? – sprawa gustu. Brzydkie? – sprawa interpretacji. Ale po kolei. Chodzi o zadanie szóste z XXXVIII Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej (Argentyna, lipiec 1997). Otóż i jego treść:

Dla liczby całkowitej dodatniej n niech $f(n)$ oznacza liczbę sposobów przedstawienia n w postaci sumy potęg liczby 2 o wykładnikach całkowitych nieujemnych. Nie rozróżniamy takich przedstawień, które różnią się jedynie porządkiem składników. Na przykład $f(4)=4$, gdyż liczbę 4 można przedstawić na cztery sposoby: 4; 2+2; 2+1+1; 1+1+1+1. Udowodnić, że $2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$ dla każdej liczby całkowitej $n \geq 3$.

Aby mieć jakikolwiek pogląd na urodę zadania, trzeba je najpierw samemu rozwiązać lub przynajmniej poznać rozwiązanie. A metod ataku jest tu sporo. Oto szkicowe przedstawienie kilku z nich; żadne rozwiązanie nie jest jednak podane w całości – zajęłoby to sporo miejsca i odebrało Czytelnikom przyjemność samodzielnego zmierzenia się z problemem. Każde z omawianych rozwiązań ma postać sekwencji kilku małych zadanek; ale nawet rozwiązywanie tych „zadanek” może dać sporo satysfakcji. Bądźmy uczciwi: niektóre z „zadanek” to całkiem pełnowymiarowe zadania...



Teza jest koniunkcją dwóch nierówności; są tu więc, de facto, dwa zadania: oszacowanie górne i dolne. Górne łatwiej udowodnić i dlatego zostanie w dalszym omówieniu pominięte. Czytelnik może to potraktować jako jedno z owych „małych zadanek”; dowód nietrudno uzyskać, korzystając ze wzorów z rozwiązania 1 lub z uwagi, od której zaczyna się rozwiązanie 4.

Trudność zadania kryje się w oszacowaniu dolnym: $f(2^n) > 2^{n^2/4}$ (słusznym zresztą dla wszystkich wykładników całkowitych $n \geq 1$) – i tylko do tej nierówności ograniczymy uwagę w szkicowanych rozwiązaniach. Zatem do dzieła.

Rozwiązanie 1. Udowodnij zależność rekurencyjną

$$f(2k+1) = f(2k) = f(2k-1) + f(k) \quad \text{dla} \quad k = 1,2,3,\ldots. \tag{1}$$

Wyprowadź z niej wzór

$$f(2r) = f(r) + f(r-1) + \ldots + f(2) + f(1) + 1;$$

wywnioskuj, że $f(4r) = h(r) + \ldots + h(1) + 1$, gdzie $h(i) = f(r+i) + f(r-i+1)$. Wykaż, że $h(r) \geq \ldots \geq h(1)$, i w konsekwencji $f(4r) > 2rf(r)$. Korzystając z tej własności, udowodnij nierówność $f(2^n) > 2^{n^2/4}$ przez indukcję.

Rozwiązanie 2. Na podstawie wzoru z pierwszego rozwiązania pokaż, że $f(8r) > rf(3r)$ oraz $f(6r) > rf(2r)$. Zestawiając te dwa fakty, wywnioskuj, że $f(16r) > 2r^2 f(2r)$ i spróbuj udowodnić nierówność $f(2^n) > 2^{n^2/4}$ przez indukcję. Okaże się, że przejście indukcyjne (od n do $n+3$) wymaga założenia, że $n \geq 7$. Pomyśl, jak uzasadnić tezę dla $n \leq 9$.

Rozwiązanie 3. Niech $\varphi(r) = 2^{(\log_2 r)^2/4}$. Teza zadania brzmi: $f(r) > \varphi(r)$ dla liczb postaci $r = 2^n$. Otóż nierówność ta zachodzi dla każdej liczby całkowitej $r \geq 4$, niekoniecznie będącej całkowitą potęgą dwójki. Przeprowadź dowód indukcyjny: przypadki $r = 4,5,6,7$ trzeba sprawdzić bezpośrednio. Zakładając, że teza zachodzi dla liczb naturalnych mniejszych od ustalonej liczby parzystej $r \geq 8$, udowodnisz jej słuszność dla r oraz $r+1$, zestawiając wzór rekurencyjny (1) z nierównością $\varphi(2k+1) < \varphi(2k-1) + \varphi(k)$ (dla $k = 4,5,6,\ldots$); ta ostatnia nierówność nie jest jednak wcale oczywista. Do jej dowodu użyj metod analizy matematycznej: zamiast argumentu całkowitego k trzeba rozważać zmienną rzeczywistą x i prowadzić wymyślne przekształcenia, wykorzystując wypukłość funkcji $x \mapsto 2^x$ oraz znaną nierówność $\ln(1+t) \leq t$. Miejscami może się przydać rachunek pochodnych. Kawał ciekawej roboty.

Rozwiązanie 4. Zauważ, że $f(2^n)$ jest liczbą ciągów $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ o wyrazach całkowitych $x_i \geq 0$, spełniających nierówność

$$2x_1 + 2^2x_2 + \ldots + 2^nx_n \leq 2^n; \tag{2}$$

niech X_n będzie zbiorem wszystkich takich ciągów. Dla dowolnego ciągu $\mathbf{x} \in X_n$ oraz dla dowolnej pary liczb całkowitych $a, b \geq 0$, spełniających warunek $a + 2b \leq 2^{n+1}$, przyjmij $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_{n+3}) = (a,\ 2x_1{+}c_0,\ 2x_2{+}c_1,\ \ldots,\ 2x_n{+}c_{n-1},\ c_n,\ 0)$, gdzie $c_0, \ldots, c_n$ są cyframi zapisu dwójkowego liczby b $(b = \sum 2^i c_i)$. Wykaż, że $\mathbf{z} \in X_{n+3}$ oraz że przyporządkowanie $(a, b, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{z}$ jest różnowartościowe. Wywnioskuj, że $f(2^{n+3}) \geq (2^n + 1)^2 f(2^n)$ i przeprowadź indukcyjny dowód tezy $f(2^n) > 2^{n^2/4}$. Przejście indukcyjne (od n do $n{+}3$) będzie wymagało założenia, że $n \geq 5$. Pomyśl, jak uzasadnić tezę dla $n \leq 7$.

Rozwiązanie 5. Niech W_n będzie zbiorem tych ciągów $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ o wyrazach całkowitych nieujemnych, które spełniają nierówności $2^i x_i \leq 2^n/n$ dla $i = 1, \ldots, n$. Ile masz możliwych wartości x_i dla ustalonego i? Ponieważ $W_n \subset X_n$ (warunek (2)), dostaniesz nierówność

(3) $$f(2^n) \geq (\text{liczba elementów zbioru } W_n) > n^{-n} 2^{n(n-1)/2}.$$

Ta ostatnia liczba jest większa od $2^{n^2/4}$, gdy $n \geq 19$. A jak sobie poradzić z mniejszymi n?

Rozwiązanie 6. Teraz litery x_i oznaczają zmienne *rzeczywiste*. Dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, \ldots, a_n$ oraz c zbiór

$$\Delta = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\colon\ x_i \geq 0, \quad a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \leq c\}$$

jest n-wymiarowym sympleksem, a jego n-wymiarowa objętość jest równa $c^n/(p \cdot n!)$, gdzie $p = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ (to dla Czytelników oswojonych z geometrią wielowymiarową). Udowodnij, że liczba punktów o współrzędnych całkowitych, leżących w tym sympleksie, nie jest mniejsza niż jego objętość. Gdy $a_i = 2^i$ oraz $c = 2^n$, wówczas liczba ta jest równa $f(2^n)$; por. warunek (2). Stąd

(4) $$f(2^n) \geq 2^{n(n-1)/2}/n!\,.$$

I znów: uzyskana liczba jest większa od $2^{n^2/4}$, ale dopiero, gdy $n \geq 12$. Konieczne jeszcze jakieś uzasadnienie dla mniejszych n.

Rozwiązanie 7. Dla $n, k = 0, 1, 2, \ldots$ niech $F(n,k)$ będzie liczbą ciągów $(x_1, \ldots, x_n)$ o wyrazach całkowitych $x_i \geq 0$, spełniających nierówność $2x_1 + 2^2 x_2 + \ldots + 2^n x_n \leq k \cdot 2^n$. Tak więc $F(n,1) = f(2^n)$ (warunek (2)). Wyprowadź wzór rekurencyjny

$$F(n,k) = F(n{-}1,\ 0) + F(n{-}1,\ 2) + F(n{-}1,\ 4) + F(n{-}1,\ 6) + \ldots + F(n{-}1,\ 2k);$$

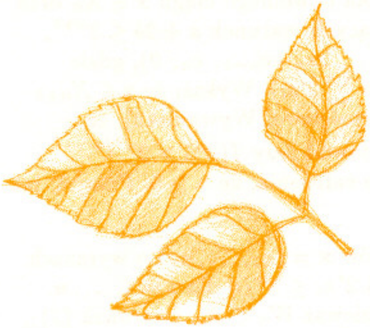
$F(0,k) = F(n,0) = 1$. Udowodnij, że $F(n,k) \geq 2^{n(n-1)/2} k^n/n!$ dla $n, k \geq 0$ (indukcja względem n). Dla $k = 1$ daje to nierówność (4), z prawą stroną większą od $2^{n^2/4}$ dla $n \geq 12$. Tezę dla mniejszych n można dostać z uzyskanej przed chwilą rekurencji.

Siedem rozwiązań. A to jeszcze nie koniec. Można użyć funkcji tworzących; metoda ta, jako mniej elementarna, została tu pominięta. Można ubrać niektóre z powyższych rozwiązań w „sukienkę kombinatoryczną"; możliwe są przeróżne odmiany i wariacje wszystkich pokazanych sposobów. Warto zauważyć, że metody rozwiązań należą do różnorodnych działów matematyki: do kombinatoryki, teorii liczb, algebry, analizy, nawet geometrii.

Bogactwo idei matematycznych to niekwestionowany walor zadania. Czy wystarczy, aby je nazwać *pięknym*? Jako się rzekło: rzecz gustu. Można w każdym razie zrozumieć tych matematyków, których zadanie zauroczyło. Ale skoro piękne, to dlaczego brzydkie?

Jeśli Czytelnik potraktował serio propozycję próby sił przy atakowaniu „małych zadanek", z których składają się powyższe rozwiązania, zapewne był zaskoczony trudnościami, które napotkał. Szczególnie irytujące mogły być trudności z uzyskaniem dowodu dla niewielkich n; zauważmy, że problem ten jest obecny we wszystkich rozwiązaniach z wyjątkiem pierwszego.

Właściwie, co za problem? To tylko kwestia bezmyślnego sprawdzenia tezy dla kilku wyrazów ciągu. Tak; ale, na przykład, osiemnaście wyrazów ciągu $f(2^1), f(2^2), f(2^3), \ldots$ (w rozwiązaniu piątym) to ćwierć miliona wyrazów ciągu $f(1), f(2), f(3), \ldots$. Kto ciekawy, niech spróbuje obliczyć te wyrazy, korzystając ze wzorów rekurencyjnych (1). Nie na kartce papieru – na komputerze! Problem nie z mocą obliczeniową, tylko z pojemnością pamięci: aby ze wzoru (1) wyznaczyć $f(1998)$, trzeba znać $f(999)$; w każdej chwili trzeba pamiętać wszystkie wcześniejsze wyrazy (no, połowę).



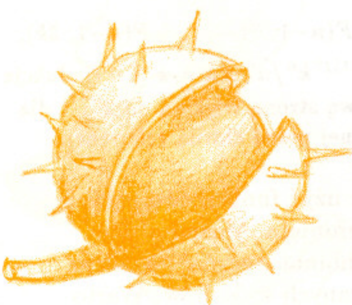
Postawmy się teraz w sytuacji uczestnika Olimpiady, który nie miał szczęścia wpaść na pomysł przedstawiony w pierwszym rozwiązaniu. Znalazł inny dowód, i tylko – bagatelka – nie umiał sobie poradzić z kilku (kilkuset) tysiącami wyrazów początkowych. Ale jeżeli jest to dowód indukcyjny – tak, jak w rozwiązaniach 2, 3, 4 – i jeżeli brak uzasadnienia tezy dla wartości wyjściowej, to *nic nie zostało udowodnione*. Z oczywistych chyba powodów nie było to przy ocenianiu traktowane w ten sposób; dowody, w których nie brakowało niczego poza owym nieszczęsnym sprawdzeniem, były uważane za „zasadniczo poprawne", z usterką, która kosztowała nie więcej niż jeden punkt.

W rozwiązaniach 5, 6, 7 sytuacja jest trochę inna: sprawdzenie tezy dla małych n nie jest potrzebne w dowodzie dla większych n. Zauważmy teraz, że rezultat uzyskany w tych rozwiązaniach jest, w pewnym sensie, znacznie mocniejszy niż to, czego się żąda w zadaniu. Niech $g(n) = \log_2 f(2^n)$. Teza zadania orzeka, że $g(n) > \frac{1}{4}n^2$. Nierówność (3) z rozwiązania 5 pokazuje zaś, że

$$g(n) > \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n - n\log_2 n; \tag{5}$$

a nierówność (4), otrzymana w rozwiązaniach 6 i 7, jest jeszcze trochę silniejsza. W połączeniu z drugą częścią tezy zadania ($g(n) < \frac{1}{2}n^2$) oszacowanie (5) daje całkiem niezłą informację o asymptotycznym zachowaniu ciągu $g(n)$, gdy $n \to \infty$; w każdym razie znacznie lepszą niż podana nierówność $g(n) > \frac{1}{4}n^2$. Tylko, jak na złość, nie implikuje tej ostatniej nierówności dla małych n.

I w ten sposób praca zawodnika, zawierająca rezultat matematycznie bardziej wartościowy, okazywała się być rozwiązaniem *niepełnym* – w odróżnieniu od pracy, w której dowodzi się „tylko" oszacowania $g(n) > \frac{1}{4}n^2$, ale za to dla wszystkich n. Czy to wystarczająco uzasadnia nazwanie zadania *brzydkim*?



Słowa krytyki należą się komisji zadaniowej; a ponieważ byłem członkiem tejże, będzie to samokrytyka. Trochę wyjaśnień. Zadania na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną wybiera Jury Olimpiady złożone z przewodniczących delegacji uczestniczących państw; robi to w ciągu dwóch dni poprzedzających zawody. Zgłoszone wcześniej propozycje zadań liczy się na setki. Aby Jury mogło w ogóle cokolwiek przez te dwa dni zdziałać, konieczna jest jakaś wstępna selekcja. Tym się zajmuje *komisja zadaniowa*, mająca kilka tygodni na dokładne zapoznanie się z wszystkimi proponowanymi zadaniami. Tym razem w pracach komisji zadaniowej uczestniczyło kilku matematyków spoza kraju organizującego olimpiadę – po jednym z Brazylii, Bułgarii, Nowej Zelandii i Polski. Naszą rolą było wybranie około 30 zadań i przekazanie ich na forum Jury, w formie opracowania zawierającego komentarze, wzorcowe metody rozwiązań oraz ewentualne sugestie niewielkich zmian treści.

Rozwiązanie zadania M 862.
Wprost z definicji x_n otrzymujemy ciąg równości

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 4 &= (x_n^2 - 2)^2 - 4 = \\ &= x_n^2(x_n^2 - 4) = \\ &= x_n^2 x_{n-1}^2 (x_{n-1}^2 - 4) = \ldots = \\ &= (x_n x_{n-1} \ldots x_1)^2 (x_1^2 - 4) = \\ &= 21(x_1 \ldots x_n)^2. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_1 \ldots x_n}\right)^2 = 21 + \frac{4}{(x_1 \ldots x_n)^2}$$

dla dowolnego n. Ponieważ z nierówności $x \geq 2$ wynika $x^2 - 2 \geq 2$, więc dla dowolnego n mamy $x_n \geq 2$ i widać już, że szukana granica jest równa $\sqrt{21}$.

Byliśmy świadomi tego, że przy niektórych metodach podejścia pojawia się kłopot z małymi wartościami n. Dodajmy jednak (gwoli usprawiedliwienia?), że w każdym z przedstawionych powyżej rozwiązań problem ten *da się* pokonać, i to metodami podobnymi do użytych w danym rozwiązaniu; komputer nie jest potrzebny. Na czym więc polegał nasz błąd? Nie uświadomiliśmy sobie, jak duże trudności sprawi to zawodnikom – i to trudności bezsensowne, zważywszy istotną „matematyczną" zawartość dowodzonej tezy.

Może powinniśmy byli zaproponować zmianę polecenia zadania na coś takiego:

Udowodnić, że $2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$ *dla dostatecznie dużych* n*?*

Albo: *Udowodnić, że istnieje taka stała* $C > 0$, *że* $C \cdot 2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$ *dla* $n \geq 3$*?*

Czy wręcz: *Udowodnić, że dla każdej liczby* $\lambda < \frac{1}{2}$ *istnieje taka liczba naturalna* n_0, *że* $2^{\lambda \cdot n^2} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$ *dla* $n \geq n_0$*?*

Rozwiązanie zadania M 863.
Rozpatrzmy ciąg $\{y_n\}$ „sprzężony" do $\{x_n\}$, tzn. $y_n = (a - b\sqrt{d})^n$. Łatwo sprawdzić, że wtedy $y_n = k_n - l_n\sqrt{d}$. Ponieważ liczby a, b są dodatnie, więc mamy $\left|\frac{a - b\sqrt{d}}{a + b\sqrt{d}}\right| < 1$ i dlatego ciąg $\frac{y_n}{x_n} = \left(\frac{a - b\sqrt{d}}{a + b\sqrt{d}}\right)^n$ dąży do zera. Mamy stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2k_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + y_n}{x_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 1$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2l_n\sqrt{d}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - y_n}{x_n} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 1,$$

czyli ostatecznie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{k_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{2k_n}}{\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{2l_n}} = \sqrt{d}.$$

Tylko że przy każdym z tych przeformułowań *treść* zadania staje się cięższa, traci elegancję. I wracamy do tytułu snutych rozważań (piękne brzydkie). Co lepsze? Ładna treść, brzydkie rozwiązanie? Ładne rozwiązanie, brzydka treść? Dylemat: coś za coś. Zręcznego wyjścia nie widzę. Ale faktem jest, że w materiale dla Jury, opracowanym przez naszą komisję, „problem małych n" został zasygnalizowany nie dość wyraziście.

Na koniec jeszcze kilka uwag. Trzymajmy się oznaczenia $g(n) = \log_2 f(2^n)$. W zadaniu należy dowieść, że $\frac{1}{4}n^2 < g(n) < \frac{1}{2}n^2$. Jest to typowe zagadnienie estymacyjne. Między prawą i lewą stroną jest ogromna przepaść. Jak można poprawić dolne oszacowanie, pokazuje nierówność (5); zgodnie ze zwyczajami przyjętymi w badaniach asymptotycznych nie zwracamy już teraz uwagi na żaden początkowy skończony odcinek ciągu $g(n)$. Oszacowanie górne (uznane na wstępie za część tezy zasługującą na mniej uwagi) także można poprawiać. Potrafię, na przykład, pokazać, że

$$\tfrac{1}{2}n^2 - n\log_2 n + An < g(n) < \tfrac{1}{2}n^2 - n\log_2 n + Bn,$$

gdzie $A = \log_2 \mathrm{e} - \frac{1}{2}$, $B = \log_2(3\mathrm{e}) - \frac{1}{2}$.

W problemach estymacyjnych nie ma czegoś takiego, jak „najlepszy rezultat" – chyba że uda się znaleźć *dokładny wzór* dla wyrazów ciągu; ale wtedy to już nie jest zagadnienie estymacyjne. Każde poprawienie oszacowania, czy to dolnego, czy górnego, może być znaczącym postępem. Byłbym bardzo zainteresowany wiadomością o tym, że w napisanej wyżej nierówności podwójnej da się zwiększyć stałą A lub zmniejszyć stałą B. A jeszcze lepiej, gdyby udało się je zrównać – tak, by „rozwarcie nożyc" zeszło do poziomu wyrazów rzędu niższego niż $C \cdot n$. Drodzy Czytelnicy: to kolejne „małe zadanko"!

Rozwiązanie zadania M 864.
Mamy

$$a_n^2 = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+1}.$$

Stąd wynika już, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pożytek z funkcji stałej

Funkcja stała na przedziale ma w nim, jak wiadomo, pochodną stale równą zeru; co więcej, funkcja, która ma w przedziale pochodną stale równą zeru, jest w tym przedziale stała. Czy tak oczywiste fakty mogą być przydatne? Mogą.

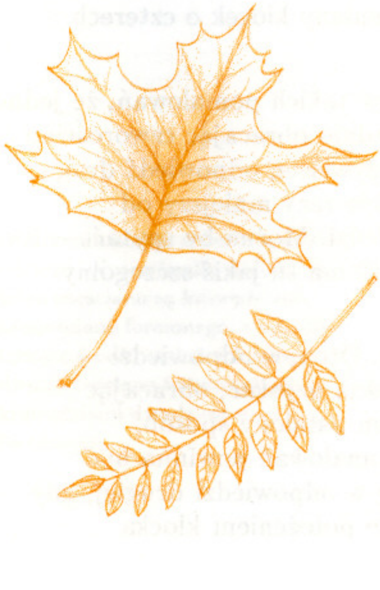
Załóżmy, że mamy funkcję f z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$, wszędzie różniczkowalną i równą swojej pochodnej oraz przyjmującą dla $x = 0$ wartość 1. Wykażemy, że tą funkcją musi być e^x. W tym celu obliczmy pochodną funkcji $g(x) = f(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$. Ze wzoru na pochodną iloczynu otrzymujemy

$$g'(x) = f'(x) \cdot \mathrm{e}^{-x} - f(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}.$$

Ale $f' = f$, więc $g'(x) = 0$ dla każdego x w $\mathbb{R}$. Funkcja $g(x)$ jest więc stała, po podstawieniu $x = 0$ (pamiętamy, że $f(0) = 1$) stwierdzamy, że jej jedyną wartością jest 1, a stąd już widać gołym okiem, że $f(x) = \mathrm{e}^x$. Lekkie, łatwe i przyjemne.

Spróbujmy dalej. Niech f i g będą funkcjami różniczkowalnymi w $\mathbb{R}$, takimi, że $f' = -g$, $g' = f$, $f(0) = 1$ i $g(0) = 0$. Domyślasz się, Czytelniku, o kim mowa? Jeśli nie (a nawet jeśli tak), zacznij od wykazania, że funkcja $h(x) = (f(x) - \cos x)^2 + (g(x) - \sin x)^2$ jest stała. Reszta to już drobiazg.

Można by powiedzieć za Archimedesem: dajcie mi funkcję stałą, a udowodnię wszystko!



W.B.