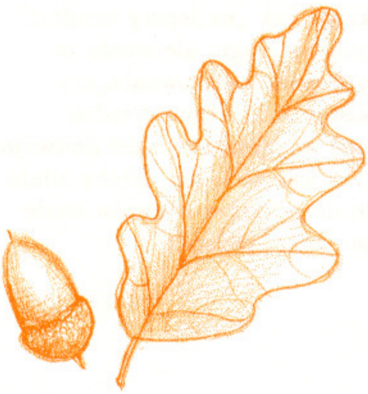
mała delta

Malowane klocki

W długie, listopadowe wieczory można – z braku lepszych i poważniejszych zajęć – pomęczyć kolegów i osoby starsze pytaniem: *na ile sposobów można pomalować czworościan foremny, malując każdą jego ścianę innym z czterech danych kolorów*? Po wyłączeniu wzruszeń ramionami i odpowiedzi niecenzuralnych pozostałe dadzą się z grubsza podzielić na dwie kategorie.

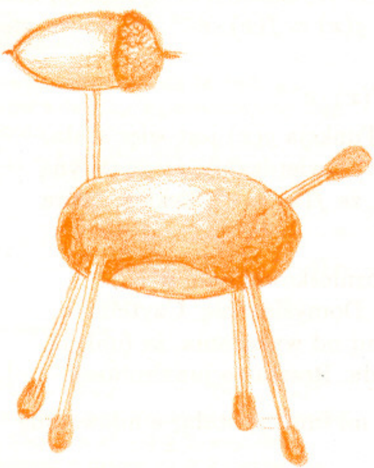


Typ 1: To proste, są $4! = 24$ różne sposoby – pierwszą ścianę można bowiem pomalować na cztery sposoby, drugą już tylko na trzy sposoby, trzecią na dwa sposoby, a do malowania czwartej ściany zostaje nam tylko jeden kolor.

Typ 2: To proste, są jedynie dwa sposoby. Wyobraźmy sobie bowiem, że cztery kolory ścian to: zielony, żółty, czerwony i niebieski. Zawsze można postawić czworościan na ścianie czerwonej i obrócić tak, by widzieć tylko ścianę niebieską. Oczywiście, są wtedy dokładnie dwie możliwości położenia ściany zielonej i ściany żółtej: jedna z nich musi być ukryta za ścianą niebieską po lewej stronie, a druga – po prawej. Innych pomalowań nie ma.

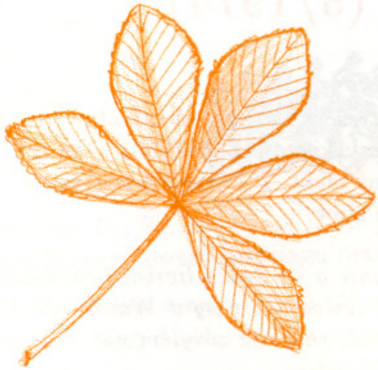
Jak powiedziałby rabin ze starego dowcipu, rację ma i ten, kto udziela pierwszej odpowiedzi, i ten, kto udziela odpowiedzi drugiej, i wreszcie Ty, Drogi Czytelniku, który stwierdzasz oczywiście, że co najmniej jedna z odpowiedzi musi być błędna.

Otóż, osoba udzielająca odpowiedzi pierwszego typu wyobraża sobie (inna sprawa, na ile świadomie) czworościan o *ponumerowanych* ścianach. Przecież odpowiedź pierwszego typu ma sens tylko wtedy, gdy wiemy, która ściana czworościanu jest *pierwsza*, która *druga*, która *trzecia*, a która *czwarta*. Kto więc mówi o 24 pomalowaniach, wyobraża sobie raczej czworościenną kostkę do gry niż drewniany klocek o czterech nieodróżnialnych ścianach.



Jeśli natomiast nie chcemy uznawać za różne takich pomalowań, że jedno z nich można otrzymać z drugiego, odpowiednio obracając czworościan w przestrzeni, to wówczas właściwa jest, oczywiście, odpowiedź druga. Pojawiający się w niej wynik 2 jest dwanaście razy mniejszy od wyniku 24 podawanego w pierwszej odpowiedzi. Można by spytać, dlaczego akurat 12, albo raczej: czy liczba 12 ma tu jakiś szczególny ukryty sens?

Odpowiedzieć na to pytanie nie jest trudno. Otóż, w odpowiedzi pierwszej wszystkie pomalowania, które można uzyskać, obracając rozmaicie czworościan pomalowany w pewien ustalony sposób, liczymy osobno. Zatem liczba wszystkich pomalowań powinna być tyle razy większa od dwójki (zjawiającej się w odpowiedzi drugiej, gdy utożsamiamy malowania różniące się jedynie położeniem klocka w przestrzeni), ile jest różnych obrotów przestrzeni trójwymiarowej przeprowadzających czworościan foremny na siebie. A tych obrotów – wliczając obrót identycznościowy – jest akurat 12.



Przekonać się o tym można na dwa sposoby. Po pierwsze, jak udowodnił Leonard Euler, *każde przemieszczenie czworościanu, nakładające go na siebie, jest obrotem wokół pewnej osi*. W przypadku czworościanu mamy cztery osie obrotu, przechodzące przez któryś wierzchołek i środek przeciwległej do niego ściany (wokół każdej z nich można czworościan obrócić o 120 lub 240 stopni) oraz trzy osie obrotu łączące środki przeciwległych (skośnych) krawędzi – wokół każdej z nich można czworościan obrócić o 180 stopni. Daje to $4 \cdot 2 + 3 = 11$ różnych obrotów, do których trzeba dorzucić jeszcze dwunasty, identycznościowy. Komu się ten rachunek nie podoba, może liczyć inaczej. Wyobraźmy sobie, że czworościenny klocek, którego każda ściana ma inny kolor, stawiamy na stole tak, by widzieć jedną krawędź i dwie przylegające do niej ściany. Można to zrobić na 12 sposobów – krawędzi jest sześć, a każdą ścianę z pary przylegającej do danej krawędzi będziemy raz widzieć po lewej, a raz po prawej stronie. Tak czy owak, matematyk powie o tym wszystkim, że *grupa obrotów czworościanu foremnego jest dwunastoelementowa*.

Steinhaus pisze też, że gdy z 30 takich pomalowanych modeli wybierzemy jeden, to z pozostałych 29 można dobrać 8 i złożyć z nich większy sześcian o takim samym rozkładzie kolorów na ścianach, jak u małego sześcianu, a przy tym tak, by kolory ścian stykających się były zgodne.

Teraz już bardzo łatwo odpowiedzieć na pytanie, na ile sposobów można pomalować klocek sześcienny, malując każdą jego ścianę innym z sześciu kolorów. Gdyby ściany były ponumerowane (jak w przypadku kostki do gry), to wszystkich pomalowań mielibyśmy $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$. Jeśli natomiast nie chcemy liczyć osobno pomalowań różniących się jedynie położeniem sześciennego klocka w przestrzeni, to liczbę 720 trzeba jeszcze podzielić przez liczbę takich obrotów przestrzeni trójwymiarowej, które przeprowadzają sześcian na siebie. Tych obrotów jest 24, a zatem sposobów pomalowania sześciennego klocka – 30. Ostatnią informację (bez uzasadnienia) można znaleźć w siódmym rozdziale *Kalejdoskopu matematycznego* Hugona Steinhausa.

Kto nie chce brać tego twierdzenia na wiarę, niech sam policzy obroty: są trzy osie obrotu łączące środki przeciwległych ścian sześcianu (wokół każdej z nich można obrócić sześcian o 90, 180 lub 270 stopni), cztery osie obrotu łączące pary przeciwległych wierzchołków (wokół każdej z nich można obrócić sześcian o 120 lub 240 stopni) i sześć osi obrotu łączących środki przeciwległych krawędzi (wokół każdej z nich można obrócić sześcian o 180 stopni). Daje to razem $3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 23$ obroty, do których trzeba jeszcze dorzucić dwudziesty czwarty, identycznościowy. Równoważnie, jeśli chcemy sześcian, którego każda ściana ma inny kolor, ustawić na stole tak, by widzieć jedno naroże i trzy przylegające doń ściany, to możemy to zrobić na $8 \cdot 3 = 24$ sposoby: trzeba zdecydować się na jedno z ośmiu naroży, a potem postanowić, która z trzech zbiegających się w nim ścian będzie na górze.

Obliczenia ułatwi obserwacja, że odcinki łączące środki sąsiednich ścian sześcianu są krawędziami ośmiościanu foremnego, a odcinki łączące środki sąsiednich ścian dwunastościanu foremnego są krawędziami dwudziestościanu foremnego.

Dla porządku dorzućmy jeszcze, że foremny klocek ośmiościenny można pomalować na 1680 sposobów, dwunastościenny na 7983360 sposobów, a dwudziestościenny na 40548366802944000 (za każdym razem zakładamy, że: (1) kolorów jest tyle, ile bryła ma ścian, (2) każdą ścianę malujemy innym kolorem, (3) malowania uzyskiwane z obracania klocka, pomalowanego w ustalony sposób, uznajemy za identyczne). To już jednak potrafiłbyś, Czytelniku, sprawdzić samodzielnie – prawda?

Małą Deltę przygotował Paweł STRZELECKI