CYFROMANIA (8)

Opowiemy teraz, jak poznaną w dotychczasowych *Cyfromaniach* wiedzę można zastosować do rozwiązania następującego zadania z obozu przygotowawczego do Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej:

ZADANIE: Dowieść, że istnieje liczba postaci 333333^{333333^n}, gdzie n jest liczbą naturalną, zakończona 333333^{333333} trójkami w zapisie dziesiętnym.

Rozwiązanie: Przypomnijmy, że z naszych poprzednich rozważań wynika, iż dla dowolnej liczby naturalnej A, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2 lub 3, a przy dzieleniu przez 8 daje resztę 3 lub 5, ciąg końcówek k-cyfrowych ($k \geq 4$) liczb A^m ma okres zasadniczy $5 \cdot 10^{k-2}$ i taka też jest liczba różnych końcówek k-cyfrowych, jakie mogą wystąpić w liczbach postaci A^m. Przy tym wszystkie dopuszczalne końcówki k-cyfrowe otrzymujemy, uzupełniając dopuszczalne końcówki 4-cyfrowe do końcówek k-cyfrowych przez dopisanie z lewej strony dowolnych $k-4$ cyfr. Za A można wziąć np. dowolną liczbę zakończoną trzema trójkami, niech więc $A = 333333$.

Liczba A^m może być zakończona cyframi 3333 – dzieje się tak dla $m \equiv 1 \pmod{500}$. Zatem, dla dowolnego $k \geq 6$, liczba A^m może kończyć się k trójkami, o ile $m \equiv R_k \pmod{5 \cdot 10^{k-2}}$, gdzie R_k jest najmniejszym wykładnikiem naturalnym, takim że $A^{R_k} \equiv \frac{10^k-1}{3} \pmod{10^k}$. Przy tym musi być $R_k \equiv 1 \pmod{50000}$, bo $R_k \equiv R_6 \pmod{50000}$, a $R_6 = 1$. Pozostaje rozstrzygnąć, czy m spełniające kongruencję $m \equiv R_k \pmod{5 \cdot 10^{k-2}}$ może być postaci A^n. Alеż oczywiście. A^n może mieć końcówkę 0001 (dla n podzielnych przez 500), może więc mieć $k-1$-cyfrową końcówkę R_k. A to wystarczy, aby $A^{A^n} = 333333^{333333^n}$ kończyło się k trójkami. Zadanie jest więc rozwiązane, bo możemy wziąć $k = 333333^{333333}$.

Tyle skrótowego szkicu rozwiązania. Jeśli myślisz, drogi Czytelniku, że coś tu jest niepotrzebnie skomplikowane i że umiałbyś to zrobić prościej, sprawdź najpierw, czy Twoje *prościej* zadziała dla liczb 33333^{33333^n}. Nie powinno, gdyż w tak zmienionej wersji teza zadania jest fałszywa.

Niech $B = 33333$. Możemy zacząć przepisywać podane wyżej rozwiązanie, zamieniając A na B:

– liczba B^m kończy się na 3333 dla $m \equiv 1 \pmod{500}$;

– liczba B^m może kończyć się $k \geq 6$ trójkami dla $m \equiv R_k \pmod{5 \cdot 10^{k-2}}$ przy odpowiednio dobranym R_k, przy tym $R_k \equiv R_5 \equiv 1 \pmod{5000}$.

Przyglądając się R_6, stwierdzamy, że $R_6 = 5000c + R_5 = 5000c + 1$, gdzie $0 \leq c \leq 9$. Ponieważ zaś $B^{5000} = 10^5 Q + 1$, otrzymujemy

$$B^{R_6} = 33333 \cdot (10^5 Q + 1)^c \equiv 10^5 Qc \cdot 3 + 33333 \equiv$$
$$\equiv 333333 \pmod{10^6},$$

skąd $Qc \equiv 1 \pmod{10}$ i c musi być nieparzyste. Zatem $R_k \equiv R_6 \equiv 5001 \pmod{10000}$.

Czy liczba zakończona na 5001 może być postaci B^n? Gdyby $B^n \equiv 1 \pmod 5$, to n musiałoby być podzielne przez 4. W takiej sytuacji B^n musiałoby przy dzieleniu przez 16 dawać resztę 1, podczas gdy 5001 daje przy dzieleniu przez 16 resztę 9. Liczba B^n nie może się więc kończyć na 5001, a co za tym idzie, liczba $B^{B^n} = 33333^{33333^n}$ nie może być zakończona sześcioma trójkami.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (10)

Rozważmy liczbę $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{[n\sqrt[8]{88}]}{2^n}$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Bezpośrednie obliczenie wartości liczby S z dokładnością do 100 cyfr po przecinku za pomocą komputera pokazuje, że

$$S = 2{,}9333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333\ldots,$$

co nie pozostawia cienia wątpliwości, że $S = \frac{44}{15}$.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (11)

ZADANIE: Obliczyć całkę $\int \frac{x\,dx}{4x^2-1}$.

Rozwiązanie: Sposób I: Całkujemy, rozkładając funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\int \frac{x\,dx}{4x^2-1} = \int \frac{x\,dx}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{x\,dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{1}{8}\left(\ln\left|x-\frac{1}{2}\right| + \ln\left|x+\frac{1}{2}\right|\right) = \frac{1}{8}\ln\left|x^2 - \frac{1}{4}\right|.$$

Sposób II: Wykonujemy podstawienie $x = \frac{\sqrt{t}}{2}$ (wtedy $t = 4x^2$ i formalnie $dx = \frac{dt}{4\sqrt{t}}$):

$$\int \frac{x\,dx}{4x^2-1} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t-1} = \frac{1}{8}\ln|t-1| = \frac{1}{8}\ln|4x^2-1|.$$

Porównując otrzymane wyniki, stwierdzamy, że $x^2 - \frac{1}{4} = 4x^2 - 1$, co oczywiście nie może mieć miejsca. Który ze sposobów całkowania daje poprawny wynik?

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl