## Zadania z matematyki nr 367, 368

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 1998

**367.** Liczby nieujemne $a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$ spełniają układ równań

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{b+y}+\sqrt{c+z}=1$$
$$\sqrt{a+y}+\sqrt{b+z}+\sqrt{c+x}=1$$
$$\sqrt{a+z}+\sqrt{b+x}+\sqrt{c+y}=1.$$

Dowieść, że $a=b=c$ lub $x=y=z$.

**368.** Niech $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, ... będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych. Znaleźć kres dolny zbioru liczb postaci $\sqrt{p_{n+1}}-\sqrt{p_n}$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

Zadanie **368** zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/1998

Przypominamy treść zadań:

**363.** Punkty $P$ i $Q$ leżą odpowiednio na płaszczyznach zawierających ściany $BCD$ i $CDA$ czworościanu foremnego $ABCD$. Dowieść, że z odcinków $AP$, $PQ$ i $QB$ można zbudować trójkąt.

**364.** Niech $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$ (w określeniu liczby $a_n$ symbol pierwiastka kwadratowego występuje $n$-krotnie). Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\cdot\sqrt{2-a_n}$.

**363.** Umieszczamy czworościan $ABCD$ w czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej, przyjmując: $A=(1,0,0,0)$, $B=(0,1,0,0)$, $C=(0,0,1,0)$, $D=(0,0,0,1)$; ma on krawędzie długości $\sqrt{2}$. Znajdujemy punkt $E=(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)$ leżący w odległości $\sqrt{2}$ od każdego z punktów $A$, $B$, $C$, $D$; wystarczy wziąć jako $\lambda$ którykolwiek z pierwiastków równania kwadratowego $(\lambda-1)^2+3\lambda^2=2$, czyli $4\lambda^2-2\lambda=1$.

Punkt $P$ leży w płaszczyźnie $BCD$, więc we współrzędnych ma postać $P=(0,x,y,z)$, gdzie $x+y+z=1$. Zatem

$$|PE|^2=\lambda^2+(\lambda-x)^2+(\lambda-y)^2+(\lambda-z)^2=$$
$$=1+x^2+y^2+z^2=|PA|^2,$$

czyli $|PE|=|PA|$; analogicznie, $|QE|=|QB|$. Trójkąt $PQE$ ma więc boki długości $|AP|$, $|PQ|$, $|QB|$.

**364.** Ciąg $(a_n)$ spełnia zależność rekurencyjną $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$; $a_1=\sqrt{2}$. Przez indukcję łatwo udowodnić, że $a_n=2\cos(\pi/2^{n+1})$. Stąd

$$2-a_n=2(1-\cos(\pi/2^{n+1}))=4\sin^2(\pi/2^{n+2}),$$

i wobec tego

$$2^n\cdot\sqrt{2-a_n}=2^{n+1}\sin(\pi/2^{n+2})=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin(\pi/2^{n+2})}{\pi/2^{n+2}}\longrightarrow\frac{\pi}{2}.$$

## Zadania

*Redaguje Łukasz WIECHECKI*

**M 859.** Cyfry pewnej liczby naturalnej $a$ zostały przestawione (w dowolny sposób) i tak otrzymaną liczbę $b$ dodano do $a$. Dowieść, że jeśli suma obu liczb jest równa $10^{10}$, to $a$ dzieli się przez 10.
Rozwiązanie na str. 9

**M 860.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ istnieje nieskończenie wiele liczb $k$, nie zawierających zer w zapisie dziesiętnym, takich, że $k$ i $nk$ mają jednakową sumę cyfr.
Rozwiązanie na str. 9

**M 861.** Dana jest liczba naturalna $n$, podzielna przez 17 i zawierająca w zapisie dwójkowym dokładnie trzy cyfry 1. Dowieść, że w zapisie dwójkowym $n$ składa się z co najmniej 9 cyfr.
Rozwiązanie na str. 16

*Redaguje Ewa CZUCHRY*

**F 485.** Orbitalny okres obiegu Io, jednego z księżyców Jowisza, jest równy 1,769 dni, a promień orbity ma 421 800 km. Obliczyć masę Jowisza, przyjmując za jednostkę masę Słońca. Jednostka astronomiczna wynosi 149,6 mln km.
Rozwiązanie na str. 11

**F 486.** Wykonano model Układu Słonecznego, używając materiałów o takiej samej średniej gęstości jak w naturze, ale zmniejszając wszystkie wymiary liniowe o stały czynnik $\varepsilon$. W jaki sposób okresy obiegu planet zależą od $\varepsilon$?
Rozwiązanie na str. 9