Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

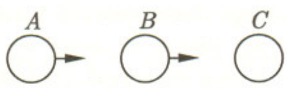
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 1998

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Zadania z fizyki nr 264, 265

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1

264. a) Dwie kulki poruszają się z prędkością równą 1 w stronę trzeciej kulki nieruchomej (rys. 1). Jeśli masy kulek są jednakowe, a zderzenia – centralne i doskonale sprężyste, to zwykle obserwujemy, że kulka A się zatrzyma, a B i C będą po zderzeniu poruszać się z prędkością 1. Załóżmy jednak, że np. zderzenie kulek B i C jest „miękkie", tzn. odbywa się za pośrednictwem nieważkiej sprężynki, a w trakcie jej ugięcia następuje „twarde" zderzenie kulek A i B (które dotąd poruszały się w pewnej wzajemnej odległości). Ile wynosi maksymalna prędkość, którą może w takim przypadku uzyskać kulka C?

Rys. 2

b) Dla czterech jednakowych kulek, z których początkowo dwie spoczywały, a dwie poruszały się z prędkością 1 (rys. 2) obliczyć maksymalną prędkość, którą może uzyskać kulka D i zaprojektować taki układ sprężynek między kulkami i taki przebieg kolejnych zderzeń, aby w ich wyniku kulka D została rozpędzona do tej prędkości.

265. Cewka czułego galwanometru jest zawieszona na nici kwarcowej mającej właściwości sprężyste, tak że kąt obrotu jest proporcjonalny do momentu siły, a stała proporcjonalności wynosi $0{,}89 \cdot 10^{-13}$ Nm/rad. Na skutek fluktuacji ciśnienia powietrza (przypadkowych niewielkich zgęszczeń i rozrzedzeń) cewka drga, a średnia kwadratowa wartość kąta odchylenia od położenia środkowego wynosi $2{,}14 \cdot 10^{-4}$ rad. Obliczyć temperaturę powietrza.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/1998

Przypominamy treść zadań:

260. Filtr polaryzacyjny przepuszcza 85% światła spolaryzowanego wzdłuż jednej osi, a drugiej składowej nie przepuszcza w ogóle. Jeżeli na zestaw takich filtrów pada światło spolaryzowane liniowo, to ile ich trzeba wziąć i jak je ustawić, aby wiązka przechodząca miała płaszczyznę polaryzacji obróconą o 90° i maksymalne natężenie?

261. W długiej rurze o stałym przekroju znajduje się gaz pod ciśnieniem 10^5 Pa, którego temperatura zmienia się liniowo od 0°C na jednym końcu rury do 200°C na drugim końcu. Ile będzie wynosiło ciśnienie w rurze, jeżeli zamkniemy ją szczelnie i doprowadzimy gaz do jednakowej temperatury 100°C?

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 256 (WT=2,02) i 257 (WT=2,20) z numeru 4/1998

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	45,74
Jarosław Łazuka	– Warszawa	27,16
Marek Wójcicki	– Szczecin	26,45
Tomasz Wietecha	– Tarnów	23,98
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	22,02

Po raz drugi – i to w równie szybkim tempie jak poprzednio – zdobył 44 punkty p. Idzik.

260. Ustawmy n filtrów polaryzacyjnych jeden za drugim i obróćmy każdy z nich o kąt $\alpha = 90°/n$ względem poprzedniego. Według prawa Malusa natężenie wiązki przechodzącej przez obrócony filtr ulega przemnożeniu przez $\cos^2\alpha$, a uwzględniając dodatkowe osłabienie o czynnik 0,85, otrzymujemy natężenie wiązki przechodzącej w postaci

$$I = I_0(0{,}85 \cdot \cos^2(90°/n))^n.$$

Metodą prób i błędów znajdujemy maksymalną wartość $I = 0{,}277 I_0$ dla $n = 4$.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 355 (WT=2,30) i 356 (WT=1,27) z numeru 2/1998

Konrad Patkowski	– Gdańsk	47,55
Piotr Kumor	– Olsztyn	46,67
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	40,64
Witold Bednarek	– Łódź	36,46
Zbigniew Skalik	– Pyskowice	34,92
Paulina Domagalska	– Zbąszynek	34,09
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	33,83

Pan Patkowski wchodzi do **Klubu 44 M** z numerem osiemdziesiątym piątym, a weteran Piotr Kumor dopisuje czwartą „gwiazdkę" do swojego nazwiska.

261. Oznaczmy początkowe ciśnienie przez p_0, temperatury na końcach rury przez T_0 i T_1, a końcową temperaturę przez T' (temperatury wyrażamy, oczywiście, w skali Kelvina). Liczba moli gazu, znajdująca się początkowo w małym odcinku rury o objętości $\mathrm{d}V$, jest opisana równaniem

$$\mathrm{d}n = \frac{p_0 \mathrm{d}V}{\mathrm{R}T}.$$

Podstawiając liniową zależność T od współrzędnej wzdłuż rury i całkując, otrzymujemy

$$n = \frac{p_0 V}{\mathrm{R}(T_1 - T_0)} \ln \frac{T_1}{T_0}.$$

Szukane ciśnienie w temperaturze T' wynosi

$$p' = \frac{n\mathrm{R}T'}{V} = \frac{p_0 T'}{(T_1 - T_0)} \ln \frac{T_1}{T_0} = 1{,}025 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 1998

Zadania z matematyki nr 367, 368

Redaguje Marcin E. KUCZMA

367. Liczby nieujemne a, b, c, x, y, z spełniają układ równań

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{b+y}+\sqrt{c+z}=1$$
$$\sqrt{a+y}+\sqrt{b+z}+\sqrt{c+x}=1$$
$$\sqrt{a+z}+\sqrt{b+x}+\sqrt{c+y}=1.$$

Dowieść, że $a=b=c$ lub $x=y=z$.

368. Niech $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, ... będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych. Znaleźć kres dolny zbioru liczb postaci $\sqrt{p_{n+1}}-\sqrt{p_n}$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

Zadanie **368** zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/1998

Przypominamy treść zadań:

363. Punkty P i Q leżą odpowiednio na płaszczyznach zawierających ściany BCD i CDA czworościanu foremnego $ABCD$. Dowieść, że z odcinków AP, PQ i QB można zbudować trójkąt.

364. Niech $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$ (w określeniu liczby a_n symbol pierwiastka kwadratowego występuje n-krotnie). Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\cdot\sqrt{2-a_n}$.

363. Umieszczamy czworościan $ABCD$ w czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej, przyjmując: $A=(1,0,0,0)$, $B=(0,1,0,0)$, $C=(0,0,1,0)$, $D=(0,0,0,1)$; ma on krawędzie długości $\sqrt{2}$. Znajdujemy punkt $E=(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)$ leżący w odległości $\sqrt{2}$ od każdego z punktów A, B, C, D; wystarczy wziąć jako λ którykolwiek z pierwiastków równania kwadratowego $(\lambda-1)^2+3\lambda^2=2$, czyli $4\lambda^2-2\lambda=1$.

Punkt P leży w płaszczyźnie BCD, więc we współrzędnych ma postać $P=(0,x,y,z)$, gdzie $x+y+z=1$. Zatem

$$|PE|^2=\lambda^2+(\lambda-x)^2+(\lambda-y)^2+(\lambda-z)^2=$$
$$=1+x^2+y^2+z^2=|PA|^2,$$

czyli $|PE|=|PA|$; analogicznie, $|QE|=|QB|$. Trójkąt PQE ma więc boki długości $|AP|$, $|PQ|$, $|QB|$.

364. Ciąg (a_n) spełnia zależność rekurencyjną $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$; $a_1=\sqrt{2}$. Przez indukcję łatwo udowodnić, że $a_n=2\cos(\pi/2^{n+1})$. Stąd

$$2-a_n=2(1-\cos(\pi/2^{n+1}))=4\sin^2(\pi/2^{n+2}),$$

i wobec tego

$$2^n\cdot\sqrt{2-a_n}=2^{n+1}\sin(\pi/2^{n+2})=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin(\pi/2^{n+2})}{\pi/2^{n+2}}\longrightarrow\frac{\pi}{2}.$$

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 859. Cyfry pewnej liczby naturalnej a zostały przestawione (w dowolny sposób) i tak otrzymaną liczbę b dodano do a. Dowieść, że jeśli suma obu liczb jest równa 10^{10}, to a dzieli się przez 10.
Rozwiązanie na str. 9

M 860. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje nieskończenie wiele liczb k, nie zawierających zer w zapisie dziesiętnym, takich, że k i nk mają jednakową sumę cyfr.
Rozwiązanie na str. 9

M 861. Dana jest liczba naturalna n, podzielna przez 17 i zawierająca w zapisie dwójkowym dokładnie trzy cyfry 1. Dowieść, że w zapisie dwójkowym n składa się z co najmniej 9 cyfr.
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 485. Orbitalny okres obiegu Io, jednego z księżyców Jowisza, jest równy 1,769 dni, a promień orbity ma 421 800 km. Obliczyć masę Jowisza, przyjmując za jednostkę masę Słońca. Jednostka astronomiczna wynosi 149,6 mln km.
Rozwiązanie na str. 11

F 486. Wykonano model Układu Słonecznego, używając materiałów o takiej samej średniej gęstości jak w naturze, ale zmniejszając wszystkie wymiary liniowe o stały czynnik ε. W jaki sposób okresy obiegu planet zależą od ε?
Rozwiązanie na str. 9