10/98 (10)

$\Gamma\lim\limits_{n\to\infty}$atias

PRAWIE ZAWSZE (2)

TWIERDZENIE: Niech p będzie prawie dowolną liczbą pierwszą. Zapiszmy liczbę

$$\frac{1}{1^{1965599}}+\frac{1}{2^{1965599}}+\frac{1}{3^{1965599}}+\frac{1}{4^{1965599}}+ \\ +\ldots+\frac{1}{(p-1)^{1965599}}$$

w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{q}{r}$. Wtedy q dzieli się przez p^2.

Twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich liczb pierwszych z wyłączeniem następujących 101 wyjątków: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 31, 37, 41, 43, 53, 61, 71, 73, 97, 101, 109, 113, 127, 131, 151, 157, 181, 211, 241, 271, 281, 313, 337, 379, 401, 421, 433, 521, 541, 547, 601, 631, 673, 701, 757, 911, 937, 1009, 1051, 1093, 1171, 1201, 1249, 1301, 1801, 1873, 1951, 2017, 2081, 2161, 2341, 2521, 2731, 2801, 3121, 3361, 3511, 4201, 5851, 6301, 6553, 7561, 8191, 8737, 9829, 11701, 12601, 14561, 15121, 15601, 16381, 17551, 21601, 21841, 24571, 26209, 28081, 30241, 39313, 54601, 65521, 70201, 81901, 93601, 109201, 131041, 140401, 151201, 196561, 218401, 393121 i 982801.
Zauważmy, że wyjątkami są wszystkie liczby pierwsze mniejsze od 50, oprócz 23 i 47.

Dowód: Niech $p>2$ będzie liczbą pierwszą, k liczbą całkowitą nieparzystą. Jeżeli $k>0$, to

$$a^k+(p-a)^k= \\ p\left(a^{k-1}-a^{k-2}(p-a)+a^{k-3}(p-a)^2-\ldots+(p-a)^{k-1}\right)\equiv \\ \equiv p\cdot a^{k-1}\cdot k \pmod{p^2},$$

skąd

$$1^k+2^k+3^k+\ldots+(p-1)^k\equiv\frac{1}{2}p\cdot k\cdot\sum_{a=1}^{p-1}a^{k-1} \pmod{p^2}.$$

Przy tym wiadomo, że $p|\sum\limits_{a=1}^{p-1}a^{k-1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(p-1)\not|(k-1)$. Zatem $p^2|p\cdot k\cdot\sum\limits_{a=1}^{p-1}a^{k-1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p|k$ lub $(p-1)\not|(k-1)$.

Gdy $k<0$, to możemy dobrać takie $l>0$, że $p(p-1)|(l-k)$ i zastosować powyższe rozumowanie do liczby l. Przy tym wiadomo, że $a^k\equiv a^l \pmod{p^2}$ dla a niepodzielnych przez p.

Wykazaliśmy tu pewną beztroskę, używając kongruencji do liczb wymiernych. Uwierz na słowo lub sprawdź sam, drogi Czytelniku, że przyjęcie definicji $\frac{a}{b}\equiv\frac{c}{d}\pmod{p^2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p^2|(ad-bc)$, pozwala sensownie stosować kongruencje do ułamków o mianownikach niepodzielnych przez p.

W naszym twierdzeniu $k=-1965599$. Wyjątkami są więc $p=2$ oraz te liczby pierwsze nieparzyste p, dla których $(p-1)|1965600$, ale $p\not|1965599$.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (8′)

Wyjaśnienie oszustwa (8): Szukana granica wynosi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+\cos x}{e^x-2}=\frac{1}{-1}=-1$.

Stosowanie reguły de l'Hospitala po raz drugi było błędem, gdyż nie mieliśmy do czynienia z wyrażeniem nieoznaczonym.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (9′)

Wyjaśnienie oszustwa (9): Rozwiązanie byłoby poprawne, gdyby szukana granica istniała. Tymczasem $a_n=99\cdot 2^{n-1}-\frac{i(2+i)^{n-1}}{2}+\frac{i(2-i)^{n-1}}{2}$, skąd wynika, że dla dużych n decydujący wpływ na wartość a_n ma liczba $-\frac{i(2+i)^{n-1}}{2}+\frac{i(2-i)^{n-1}}{2}=5^{\frac{n-1}{2}}\sin((n-1)\phi)$, gdzie $\phi=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=26^\circ,565\ldots$.

Zatem ciąg (a_n) zachowuje się dosyć kapryśnie – ma nieskończenie wiele wyrazów dodatnich i nieskończenie wiele wyrazów ujemnych. Dla bardzo dużych n wyrazy te są skupione w grupki po 6–7 kolejnych wyrazów tego samego znaku.

Poniższa tabela pokazuje, gdzie zaczyna się ukazywać prawdziwe oblicze ciągu (a_n).

n	a_n	a_n/a_{n-1}
4	803	2,0075
5	1608	2,00249066
6	3209	1,995646766
7	6380	1,988158305
8	12643	1,981661442
9	25008	1,978011548
10	49489	1,978926743
11	98260	1,985491725
12	196283	1,997588032
13	395208	2,013460157
14	802169	2,02973877
15	1638140	2,042138253
16	3352723	2,04666451
17	6842208	2,040791321
18	13849249	2,024090615
19	27674020	1,99823254
20	54425963	1,966680771
...	...	...
42	251676768682129	3,132795981
43	713877974593300	2,836487366
44	1814831357262203	2,542215087
45	4125342160681608	2,273127001
46	8298025065614009	2,011475592
47	14307015877445180	1,724147103
48	19221191018505043	1,343480093
49	12316190360383008	0,6407610407
50	−32908182303815711	−2,671944923
51	−165347658322822940	5,024515082
52	−441117676383503317	2,667819314
53	−826268323142478792	1,873124491
54	−876556729097559031	1,060862077
55	1070971062431836940	−1,221793213
56	9558380621434501123	8,924966282

Iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nieskończenie wiele razy bywa ujemny, nie może więc dążyć do 2.
Zatem wyrażenie $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nie ma granicy.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl