

# Cyfry: indyjskie czy arabskie?

Witold WIĘSŁAW

motto: *Od jednej przyszło aż więc do dziewięci,  
A człowiekowi mózg się we łbie mąci...*  
(Jan Kochanowski, *O Doktorze Hiszpanie*)

Ma to być opowieść, jak to było z systemem dziesiętnym. Faktów znanych jest niewiele, nie zawsze wiadomo, co jest prawdą, a co tradycją. Ale w coś trzeba wierzyć. Spójrzmy więc w zamierzchłą przeszłość.

Pierwszy odnotowany przez archeologów zapis liczb to kreski i karby na różnych przedmiotach, początkowo pojedyncze, a później łączone w pęczki, na ogół po pięć lub dziesięć. Kość promieniowa młodego wilka, znaleziona w Vestonicach na Morawach, ma regularne nacięcia, zapewne zrobione krzemieniem. Kość ma około 30000 lat. Być może znalezione zostaną starsze przedmioty, na których pozostawiono ślady zliczania czegoś. Początkowo porównywano liczebność zbioru z odpowiednią liczbą palców u rąk, a jeśli ich nie starczało, to i u nóg. W ten sposób najczęściej rachowano za pomocą dziesiątek, dwudziestek lub jednych i drugich. Odbiło się to w rozwoju liczebników w językach indoeuropejskich, które oparte są na wielokrotnościach 10, 20 lub obu tych liczb. W wielu innych językach jest podobnie. Henri Lebesgue, matematyk nie wymagający przedstawienia, miał powiedzieć, że gdyby człowiek miał trzynaście palców u rąk, to zapewne powstałby system trzynastkowy. Zapewne tak.

W drugiej połowie III tysiąclecia p.n.e. semici z Mezopotamii zapożyczyli cyfry klinowe i stopniowo adaptowali je do bazy 10. W pierwszej połowie II tysiąclecia p.n.e. asyryjsko-babilońska dziesiętna numeracja klinowa zaczęła stopniowo wypierać sumeryjski system sześćdziesiątkowy i rozpowszechniać się na Bliskim Wschodzie. W wiekach XVIII–XII p.n.e. pojawiły się na kostkach najstarsze znane cyfry chińskie. Wyroby z brązu epoki Czou (XII–III w. p.n.e.) zawierają zapisy liczb do 30 000, wówczas jeszcze niejednoznaczne. Zapis liczb uległ nieznacznej modyfikacji za panowania dynastii Han (206 p.n.e.–220 n.e.).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Epoka In	—	=	≡	≡	⊗	∧ ∩	+	⊗	⊗
Epoka Czou	—	=	≡	≡	⊗	↑	+	⊗	⊗
Dynastia Han	—	=	≡	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗

W epoce Tan (618–907) system zapisu liczb był już w miarę konsekwentny. Był to zapis za pomocą dziewięciu znaków (cyfr), zapis poziomy lub pionowy, przy czym na miejscach o numerach parzystych używano innych znaków niż na miejscach o numerach nieparzystych.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A						⊥	⊥	⊥	⊥
B	—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	≡	≡

albo:

•	•	•	•
---	---	---	---

A – na miejscach jednostek, setek, dziesiątków tysięcy itd.  
B – na miejscach dziesiątek, tysięcy, setek tysięcy itd.

Nie było osobnego znaku na oznaczenie zera, ale zamiast zera zostawiano puste miejsce. Prowadziło to do nieporozumień, jeżeli tylko tekst był napisany niestarannie. Nie było jednak algorytmów, które pozwalałyby wykonywać działania na cyfrach, zamiast na liczbach zapisanych za pomocą tych cyfr. Zapewne, niezależnie od Chin, początków systemu dziesiętnego doszukać się można w Indiach – pojawiły się tam cyfry brahmi w napisach buddyjskich z Nana Ghat. Można tam znaleźć pierwowzory niezerowych cyfr. Nie są one jednak używane zgodnie z zasadą pozycyjną. System dziesiętny, wraz z zerem, odnajdujemy u matematyka i astronoma, Aryabhaty, w VI wieku. W roku 628/29 Bhaskara I ugruntował pozycyjny system dziesiętny – posługiwał się konsekwentnie sanskryckimi znakami cyfrowymi.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
2	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७	१८	१९	१०
3	१११	११२	११३	११४	११५	११६	११७	११८	११९	११०
4	११११	१११२	१११३	१११४	१११५	१११६	१११७	१११८	१११९	१११०
5	१११११	११११२	११११३	११११४	११११५	११११६	११११७	११११८	११११९	११११०
6	११११११	१११११२	१११११३	१११११४	१११११५	१११११६	१११११७	१११११८	१११११९	१११११०
7	१११११११	११११११२	११११११३	११११११४	११११११५	११११११६	११११११७	११११११८	११११११९	११११११०
8	११११११११	१११११११२	१११११११३	१११११११४	१११११११५	१११११११६	१११११११७	१११११११८	१११११११९	१११११११०
9	१११११११११	११११११११२	११११११११३	११११११११४	११११११११५	११११११११६	११११११११७	११११११११८	११११११११९	११११११११०

Stopniowa modyfikacja cyfr w Indiach.

Od roku 622 (początek ery muzułmańskiej – hidżry) zaczyna się ekspansja islamu. To zapewne dzięki temu biskup syryjski, Severos Sebokht, z klasztoru Kenesra (w górnym biegu Eufratu) mógł wzmiankować o cyfrach, jak je nazwał – indyjskich. Uczni islamu szybko przyswoili nowe idee. Al-Chorezmi, ich najwybitniejszy przedstawiciel, pisał już podręczniki na ten temat. Były to podręczniki arytmetyki i nowego kierunku w matematyce – algebry, która uczyła, jak rozwiązywać równania, nie odwołując się, wzorem matematyków kultury hellenistycznej,



do geometrycznej interpretacji. Był to przełom VIII i IX wieku. Nie jest jednak prawdą, że system dziesiętny został przyjęty w krajach islamu bez oporu. Uczni przyjęli go chętnie. Natomiast w praktyce codziennej w użyciu był jeszcze dość długo arabski system zapisu liczb.

W tym samym czasie, w połowie IX wieku, arytmetyka w Indiach była już doskonale rozwinięta. Świadczyć o tym może np. podręcznik matematyki *Ganita-sara-sangraha*, autorstwa Mahaviracaryi. Dzieło to i inne, podobne, stworzyły pewien standard nauczania systemu dziesiętnego. System ten nie został tam wyłożony abstrakcyjnie – liczby symbolizowane były przez odpowiednie słowa, a w tekście używa się skrótów tych słów. To są właśnie pierwsze cyfry. Tekst napisany został w języku południowych rubieży Indii, karonese. Późniejsze i pokrewne teksty, pisane sanskrytem, zawierają odpowiednie symbole sanskryckie. A wszystkie te teksty, aż do pierwszej połowy XIX wieku, pisane są według następującego schematu: cyfry, ich postać, sposób zapisu liczb naturalnych, działania arytmetyczne na liczbach naturalnych, tzn. dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, połowienie, podwajanie, obliczanie pierwiastka kwadratowego, czasami też i sześciennego. Następnie wykładano to samo dla liczb ułamkowych, czyli wymiernych, dołączając na koniec na ogół mętne (z dzisiejszego punktu widzenia) informacje o zapisie dziesiętnym dowolnych liczb, wraz z informacjami, jak obliczać obwód koła i jego pole.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
८	२	३	४	५	६	७	८	९	०
८	२	३	४	५	६	७	८	९	०
८	२	३	४	५	६	७	८	९	
८	२	३	४	५	६				०
८	२	३	४	५	६	७	८	९	०
८	२	३	४	५	६	७	८	९	०
८	२	३	४	५	६	७	८	९	०
८	२	३	४	५	६	७	८	९	०

Różne europejskie i orientalne modyfikacje cyfr systemu dziesiętnego.

Każdy z takich tekstów zawierał przykłady numeryczne. To one były podstawą nauczania systemu dziesiętnego w całym ówczesnym świecie. Jeszcze w II połowie XVIII wieku tak właśnie skonstruowany był podręcznik Simona l’Huilliera *Arytmetyka dla Szkół Narodowych*, zatwierdzony do użytku w Polsce przez Towarzystwo do Ksiąg Elementarnych w 1778 roku. Wróćmy jednak do czasów wcześniejszych. Pierwszym propagatorem systemu dziesiętnego w Europie w X wieku był mnich Gerbert, późniejszy papież Sylvester II (999–1003).

Upowszechnił on abak – liczydło służące do obliczeń w systemie dziesiętnym. Przełom, jeśli można tak powiedzieć, nastąpił na początku XIII wieku. Leonardo z Pizy, nazwany Fibonaccim (filius Bonacci, czyli Fibonacci – syn Bonacciego) przez włoskiego historyka matematyki XIX wieku, Libriego, po licznych podróżach do krajów dzisiejszego Maghrebu, napisał w roku 1202 opasłe dzieło *Liber abbaci* (*Księga abaku*), które z czasem utarowało drogę pozycyjnemu systemowi dziesiętnemu w Europie. W historii matematyki utrwalił się Leonardo nie z powodu tego dzieła, ale ... zadania o królikach, jednego z wielu zadań w tej książce. *Ile par królików może urodzić się w ciągu roku z jednej pary? Jest jedna para królików w pewnym miejscu otoczonym murem. Chcemy wiedzieć, ile par królików urodzi się z tej pary w ciągu roku, jeżeli natura tych królików jest taka, że rodzą one każdego miesiąca jedną parę i zaczynają być płodne w drugim miesiącu po urodzeniu.*

Przełom nastąpił nie bez oporu czynników oficjalnych. Jeszcze w XVIII wieku w podręcznikach matematyki do szkół jezuickich można przeczytać o *cyfrach arabskich i cyfrach kościelnych* (tzn. rzymskich). Przełom jednak został dokonany i było już tylko kwestią czasu, aby system dziesiętny ostatecznie zatriumfował w Europie. Akceptacją dokonywała się poprzez praktykę – system dziesiętny był w użyciu. Jeżeli np. sięgnąć do dzieła Kopernika, ważnego nie tylko z racji naszej narodowej dumy: *De Revolutionibus Orbium Coelestium, Libri VI, Norimbergae, Anno M.D.XLIII*, dzieła nie tak znowu dużego, bo liczącego 196 numerowanych kart, to łatwo spostrzec, że wszystkie tablice, jak też odpowiednie obliczenia, zapisane są w systemie dziesiętnym i to tak, jak to dziś robimy. Symbole cyfr nie różnią się w istotny sposób od współczesnych.

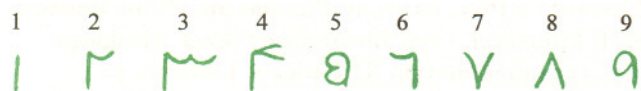
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
B	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۰

Współczesne cyfry: A – sanskryckie, B – arabskie.

Tym, który niejako zamknął okres wprowadzania pozycyjnego systemu dziesiętnego do Europy, był Simon Stevin (1548–1620), a dziełem, które postawiło przysłowiową kropkę nad „i” – *La Disme* (w oryginale *De Thiende*, czyli *Dziesiątka*, w dość wolnym przekładzie). Dzieło wyszło drukiem w 1585 roku. Okazuje się, że (jeszcze) uczeni islamu wiedli prym i w tej dziedzinie. Otóż na początku XV wieku al Kaszi (od miasta Kaszan w północnej Persji – dziś Iranie), wybitny astronom i matematyk, napisał traktat *Klucz arytmetyki*, w którym znajdujemy niemal wszystko to, co napisał później Stevin.



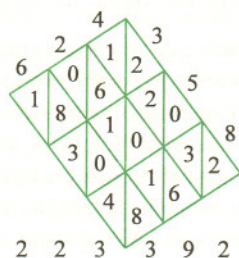
Ale kto w Europie czytał wówczas po arabsku? Wątpliwe jest więc, czy dzieło al Kasziego było w ogóle znane w Europie.



Cyfry, których używał al Kaszi.

Jego pierwsze tłumaczenia zaczęły ukazywać się w Europie, jak w przypadku innych tekstów matematycznych z odległej przeszłości, w II połowie XIX wieku i na początku XX wieku. Zapewne więc, gdyby dzieło al Kasziego przetłumaczono wcześniej, to Stevin byłby bezrobotnym matematykiem.

Algorytmy działań na liczbach niekiedy różniły się sposobem zapisu od współczesnych. Na przykład mnożenie  $624 \cdot 358$  zapisuje al Kaszi w postaci tabelki:



A oto jak Stevin zapisuje i dodaje ułamki dziesiętne 27,847; 37,675; 875,782: *Liczby dziesiętne dane [są] poniżej; jak je dodać, aby znaleźć ich sumę.*

Są trzy rzędy dziesiętne liczb danych, z których pierwszą jest 27<sup>0</sup>, 8<sup>1</sup>, 4<sup>2</sup>, 7<sup>3</sup>, drugą 37<sup>0</sup>, 6<sup>1</sup>, 7<sup>2</sup>, 5<sup>3</sup>, trzecią 875<sup>0</sup>, 7<sup>1</sup>, 8<sup>2</sup>, 2<sup>3</sup>.

Schematycznie Stevin zapisuje to w postaci:

	0	1	2	3
2	7	8	4	7
3	7	6	7	5
8	7	5	7	8
9	4	1	3	0
	4	1	3	0

Na koniec polonica związane z systemem dziesiętnym. Otóż w 1777 roku ukazała się mała, kilkustronicowa broszurka autorstwa pijara, Bernarda Sirucia: *Arytmetyka prostacka czyli Nowy Sposób czynienia Rachunków, którego Nieumiejących czytać nawet, łatwo nauczyć można. Jak to: Gumiennych, Szynekarów, Włodarów & c. że sobie kretą lub węglem kresując, albo na kiju nożem karbując porachować, co do nich należy, będą mogli.* Siruć pisał:

*Te wszystkie liczby wyrażać się będą laseczkami tylko, a różnice ich wyznaczać się będą przez krzyżyk naksztalt litery x, zaczynają kreślić zwykłym sposobem od większej liczby do mniejszej. Litera tedy x liczby żadnej nie znaczy. Tym sposobem Złotych trzy tysiące dwieście pięćdziesiąt cztery, wyrazi się tak: III x II x IIII x IIII, to jest za trzy tysiące kreślę trzy laseczki y krzyżyk; za dwieście dwie laseczki y krzyżyk; za pięćdziesiąt kreślę pięć laseczek y krzyżyk; a na ostatku cztery laseczki znaczące prostą liczbę cztery; gdzie znaki x dla tego tylko są używane, żeby laseczki znaczące Ita, dziesiątki, z inszemi się nie pomieszały.*

Piątka pisana jest jako A. Przykład rachunku dla szynkarzy:

Miał	III	x	A	x	IIII
Zyskał	III	x	III	x	II
Summa	AI	x	AIII	x	AI

Można więc nie umieć czytać ani pisać, a mimo to sprawnie posługiwać się systemem dziesiętnym. W ten sposób wróciliśmy do kresek i karbów, ale jakże inaczej niż przed tysiącami.

Do dalszego czytania  
(zamiast bibliografii, bo kto zechce czytać teksty starochińskie lub staroarabskie?)

- [1] Georges Ifrah, *Dzieje liczby czyli historia wielkiego wynalazku*, Ossolineum, Wrocław 1990.
- [2] Marek Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1994.
- [3] Witold Więśław, *Matematyka i jej historia*, NOWIK, Opole 1997.

## Rewolucyjna reforma miar i wag

*Andrzej Kajetan WRÓBLEWSKI*

Kilkaset lat temu dobrze ustalone były tylko jednostki pomiaru czasu, ponieważ datujący się od starożytności podział doby na godziny, minuty i sekundy był utrwalony wszędzie. Istniało natomiast mnóstwo miar lokalnych dla długości, powierzchni, objętości i ciężaru, czasem różniących się znacznie mimo tej samej nazwy.

Podejmowano rozmaite próby standaryzacji jednostek miar. Oto, na przykład, stary przepis z 1536 roku, ustalający jednostkę miary długości, polecał wybierać

16 kolejnych mężczyzn wychodzących po niedzielnej mszy z kościoła. Mieli oni ustawiać swe prawe stopy tak, aby ich szesnaście butów było w linii jeden za drugim. Tak otrzymana jednostka – głosił przepis – jest sprawiedliwą i powszechną miarą do pomiarów gruntu.

Miara ta miała szereg zalet. Można ją było w przybliżeniu odtwarzać w każdą niedzielę i łatwo dzielić na dwie, cztery i osiem części, uzyskując miary