Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:

30 XI 1998

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 353 (WT=2,39) i 354 (WT=1,50) z numeru 1/1998

Konrad Patkowski	– Gdańsk	43,98
Piotr Kumor	– Olsztyn	43,10
Maciej Mostowski	– Warszawa	42,81
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	39,37
Witold Bednarek	– Łódź	34,16
Paulina Domagalska	– Zbąszynek	34,09
Zbigniew Skalik	– Pyskowice	33,65
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	32,56

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 254 (WT=2,37) i 255 (WT=1,73) z numeru 3/1998

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	41,52
Tomasz Wietecha	– Tarnów	23,98
Jarosław Łazuka	– Warszawa	23,97
Marek Wójcicki	– Szczecin	22,23
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	22,02
Aleksander Surma	– Myszków	14,47

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Zadania z matematyki nr 365, 366

Redaguje Marcin E. KUCZMA

365. Znaleźć wszystkie czwórki liczb całkowitych $t, x, y, z > 0$ spełniające równanie
$$(x+y)(y+z)(z+x) = txyz$$
wraz z warunkiem: liczby x, y, z są parami względnie pierwsze.

366. Punkt D leży na boku AC trójkąta ABC. Okrąg o środku P opisany na trójkącie ABD jest styczny do prostej BC. Okrąg o środku Q opisany na trójkącie BCD jest styczny do prostej AB. Odcinki PQ i BD przecinają się w punkcie E. Udowodnić, że $|PQ|\cdot|BD|^3 = 2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot|PE|\cdot|QE|$.

Zadanie 366 zaproponowała pani Joasia Jaszuńska z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1998

Przypominamy treść zadań:

361. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie k, dla których istnieje wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych spełniający warunki: $P(0) \neq P(1)$, $0 \le P(j) \le k$ dla $j = 0, 1, \ldots, k+1$.

362. Cztery różne okręgi ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 o jednakowym promieniu r przechodzą przez wspólny punkt S i przecinają się kolejno parami:
$$\omega_i \cap \omega_{i+1} = \{S, P_i\} \qquad \text{dla} \quad i = 1,2,3,4 \quad (\omega_5 = \omega_1);$$
przy tym punkty P_1, P_2, P_3, P_4 leżą na okręgu Ω o promieniu R, a środek okręgu Ω leży w odległości d od punktu S. Znaleźć związek między liczbami r, R, d. Czy każda trójka liczb dodatnich, spełniająca ów związek, jest wyznaczona przez pewną czwórkę okręgów ω_1, ω_2, ω_3, ω_4?

361. Przypuśćmy, że $P(x)$ jest wielomianem o wymaganych własnościach i że $k > 3$. Różnica $P(k+1) - P(0)$ dzieli się przez $k+1$, a jej wartość bezwzględna nie przekracza k. Jest więc równa zeru, skąd wniosek, że
$$P(x) - P(0) = x(x-k-1)Q(x)$$
dla pewnego wielomianu $Q(x)$ o współczynnikach całkowitych; przy tym $Q(1) \neq 0$, bo $P(1) \neq P(0)$. Dla $j = 2, \ldots, k-1$ wartość bezwzględna iloczynu $j(j-k-1)$ jest większa od k, natomiast moduł różnicy $P(j) - P(0)$ nie przekracza k. W takim razie $Q(j) = 0$ dla $j = 2, \ldots, k-1$, i w konsekwencji
$$Q(x) = (x-2)(x-3)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)R(x)$$
dla pewnego wielomianu $R(x)$ o współczynnikach całkowitych; $R(1) \neq 0$. Z uzyskanych wzorów wynika nierówność
$$|P(1)-P(0)| = 1\cdot k\cdot|Q(1)| = k\cdot(k-2)!\cdot|R(1)| \ge k\cdot(k-2)! > k,$$
sprzeczna z warunkami zadania. To znaczy, że dla $k > 3$ nie istnieje wielomian o podanej własności. Dla $k \le 3$ wielomiany takie istnieją; oto przykłady (kolejno dla $k = 1,2,3$): $P_1(x) = x(2-x)$; $P_2(x) = x(3-x)$; $P_3(x) = x(4-x)(x-2)^2$.

362. Skoro ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 są czterema różnymi okręgami, P_1, P_2, P_3, P_4 są czterema różnymi punktami. Oznaczmy środek okręgu ω_i przez O_i $(i = 1,2,3,4)$, a środek okręgu Ω przez Q. Niech $\mathbf{v}_i = \overrightarrow{SO_i}$. Czworokąt $SO_iP_iO_{i+1}$ jest rombem, więc $\overrightarrow{SP_i} = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1}$. Zatem $\overrightarrow{P_iP_{i+1}} = \overrightarrow{SP_{i+1}} - \overrightarrow{SP_i} = \mathbf{v}_{i+2} - \mathbf{v}_i$, skąd $\overrightarrow{P_1P_2} = -\overrightarrow{P_3P_4}$. To znaczy, że czworokąt $P_1P_2P_3P_4$ jest równoległobokiem; a ponieważ jest wpisany w okrąg Ω, jest to prostokąt. Tak więc $P_1P_2 \perp P_2P_3$, czyli $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_2$. Stąd łatwo wynika, że $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \perp \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$. Odcinek P_1P_3 jest średnicą okręgu Ω, wobec czego $2\cdot\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SP_1} + \overrightarrow{SP_3} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$. Zatem
$$(2d)^2 = \left(\sum \mathbf{v}_i\right)^2 =$$
$$= \sum|\mathbf{v}_i|^2 + 2\cdot\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3 + 2\cdot\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_4 + 2\cdot(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3)\cdot(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_4) =$$
$$= 4r^2 + 2\cdot(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_4).$$
Z drugiej strony,
$$(2R)^2 = |P_1P_3|^2 = |P_1P_2|^2 + |P_2P_3|^2 = (\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_1)^2 + (\mathbf{v}_4-\mathbf{v}_2)^2 =$$
$$= 4r^2 - 2\cdot(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_4).$$
Dodajemy otrzymane równania i mamy szukany związek: $R^2 + d^2 = 2r^2$.

Aby odpowiedzieć na ostatnie pytanie z zadania, ustalmy okrąg ω o środku S i promieniu r i zauważmy, że jeśli O_1O_3 i O_2O_4 są dowolnymi prostopadłymi cięciwami tego okręgu, to okręgi ω_i (o środkach O_i i promieniu r) wyznaczają punkty P_i będące kolejnymi wierzchołkami prostokąta (bowiem $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_2$); istnieje zatem okrąg Ω.

Gdy prostopadłe cięciwy O_1O_3 i O_2O_4 są króciutkie (a więc każdy z odcinków O_iO_{i+1} ma długość bliską $\sqrt{2}\,r$), wówczas punkty P_i leżą blisko siebie i promień okręgu Ω może być dowolnie mały. Gdy O_1O_3 i O_2O_4 są prostopadłymi średnicami okręgu ω, wówczas punkty P_i są wierzchołkami kwadratu o boku $2r$ i okrąg Ω ma promień $R = \sqrt{2}\,r$.

Przechodząc w sposób ciągły od jednej konfiguracji do drugiej (przy ustalonym r), jesteśmy w stanie uzyskać wszystkie wartości R z przedziału $(0, \sqrt{2}\,r)$; wartość d jest wyznaczona przez równanie $R^2 + d^2 = 2r^2$. Wobec dowolności r daje to twierdzącą odpowiedź na postawione pytanie.

Zadania z fizyki nr 262, 263

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 1998

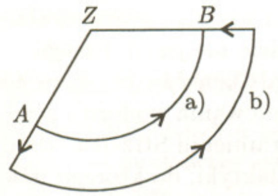
262. Zerwanie się napiętego drutu stalowego jest niebezpieczne, gdyż urwane końce uzyskują przy tym dużą prędkość. Obliczyć wartość tej prędkości. Niezbędne dane wziąć z tablic.

263. Punkt Z jest źródłem przenikliwego promieniowania izotropowego (tzn. którego natężenie nie zależy od kierunku), a punkty A i B są od niego jednakowo odległe, przy czym kierunki ZA i ZB tworzą kąt 120° (rys. 1). Którą drogę z A do B należy wybrać, idąc ze stałą prędkością, aby otrzymać przy tym jak najmniejszą dawkę promieniowania:

a) 1/3 okręgu o środku w Z,

b) odcinek z A w kierunku przeciwnym do Z (jak długi?), 1/3 okręgu o promieniu większym niż poprzednio i zbliżenie do Z wzdłuż promienia?

Czy istnieje rozwiązanie lepsze od każdego z tych dwóch? Jeśli tak, to opisać taką drogę i podać wartość otrzymanej dawki (niekoniecznie musi to być droga optymalna). Można użyć dowolnych jednostek.



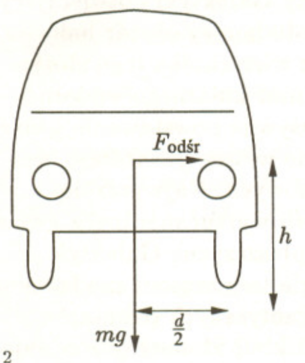
Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1998

Przypominamy treść zadań:

258. Jednym ze „ślepych zaułków" w rozwoju motoryzacji były projekty samochodu trójkołowego. Obliczyć maksymalną prędkość v', z jaką taki samochód mógłby na poziomej jezdni wykonać zakręt bez przewrócenia się, jeśli maksymalna prędkość samochodu czterokołowego na tym zakręcie wynosi $v = 60$ km/h. Trójkołowiec ma dwa koła w przedniej osi odległe od siebie o d i jedno koło tylne odległe od środka przedniej osi o l, przy czym tę samą wartość d ma odległość między kołami w osi samochodu czterokołowego. Środek masy obu samochodów leży na tej samej wysokości h nad jezdnią, a nacisk na każde z kół jest jednakowy (w samochodzie stojącym). Pominąć efekty związane z przyspieszaniem lub hamowaniem, a także ze zmianą promienia skrętu (rozpatrujemy ruch jednostajny po okręgu); ponadto przyjąć, że promień skrętu jest znacznie większy od rozmiarów samochodu.

259. Czy można z trzech jednakowych soczewek skupiających skonstruować lunetę powiększającą trzykrotnie i dającą obraz: a) prosty, b) odwrócony? Jeśli tak, to jakie powinny być odległości między kolejnymi soczewkami?



Rys. 2

258. W przypadku samochodu czterokołowego rozpatrując siły działające w płaszczyźnie prostopadłej do osi samochodu (rys. 2), stwierdzamy, że samochód nie przewróci się, jeśli spełniona będzie nierówność

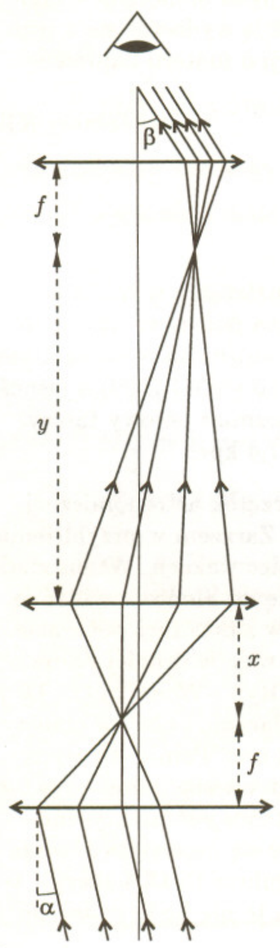
$$\frac{F_{\text{odśr}}}{mg} < \frac{d}{2h}. \qquad (*)$$

Podstawiając $F_{\text{odśr}} = mv^2/r$ (gdzie r – promień skrętu), otrzymujemy ograniczenie prędkości w postaci $v^2 < rdg/(2h)$.

Dla samochodu trójkołowego powyższe zależności obowiązują z dwiema modyfikacjami. Po pierwsze, zgodnie z założeniem o jednakowym obciążeniu kół rzut środka masy na płaszczyznę poziomą leży w odległości $(1/3)l$ od środka przedniej osi, a $(2/3)l$ od tylnego koła; odległość tego punktu od prostej przechodzącej przez tylne koło i jedno z przednich jest równa

$$d' = \frac{dl}{3\sqrt{l^2 + (d/2)^2}}$$

i pełni rolę analogiczną do $d/2$ na rysunku i w równaniu (*). Po drugie, istotna jest ta składowa siły odśrodkowej, która jest prostopadła do wyżej wzmiankowanej prostej – znajdziemy ją, mnożąc $F_{\text{odśr}}$ przez ułamek $l/\sqrt{l^2 + (d/2)^2}$. Po wprowadzeniu tych zmian do równania (*) otrzymujemy nierówność $v'^2 < rdg/(3h)$, zatem graniczna wartość v' wynosi $v' = v\sqrt{2/3} \approx 49$ km/h.



Rys. 3

259. Oznaczmy ogniskową soczewek przez f, a odległości między nimi przez d_1 i d_2. Przyjmijmy – jak zwykle w przypadku lunet – że przedmiot jest bardzo odległy, czyli wiązka światła wpadającego do lunety jest równoległa i tworzy z osią optyczną mały kąt α. Wiązka wybiegająca z lunety powinna także być równoległa, a kąt β między nią a osią ma, zgodnie z założeniem, mieć wartość $\beta = 3\alpha$. Zatem obraz wytworzony przez pierwszą soczewkę (będący przedmiotem dla drugiej) znajduje się w jej płaszczyźnie ogniskowej w odległości αf od osi, a obraz wytworzony przez drugą soczewkę (będący przedmiotem dla trzeciej) znajduje się w płaszczyźnie ogniskowej trzeciej soczewki w odległości βf od osi (rys. 3). Wynika stąd, że druga soczewka wytwarza obraz trzykrotnie powiększony, czyli jeśli ten obraz jest rzeczywisty, to jest odległy od soczewki o $y = 4f$, natomiast przedmiot jest odległy o $x = (4/3)f$. Rozwiązanie (odpowiadające lunecie dającej obraz prosty) ma postać $d_1 = f + x = (7/3)f$, $d_2 = f + y = 5f$. Dla przypadku lunety odwracającej rozwiązanie nie istnieje, gdyż jej powiększenie nie może przekraczać wartości 2 (tak byłoby dla $d_1 = (3/2)f$, $d_2 = 0$).