9/98 (9)

Γ-limatias

PRAWIE ZAWSZE (1)

TWIERDZENIE: Niech n będzie prawie dowolną liczbą naturalną oraz niech liczby rzeczywiste $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ spełniają nierówność

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + 13\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 5\sum_{i=1}^{n} x_i \le n + n^2.$$

Wtedy zachodzi nierówność

$$(2) \qquad 10\sum_{i=1}^{n} x_i^3 < 37n + n^2 + 55\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich n, z wyjątkiem następujących 17 wartości: 8, 323, 365, 518, 603, 680, 833, 875, 918, 960, 1113, 1190, 1275, 1428, 1470, 1785 i 1793.

Dowód:
Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $(x-6)^2(x+1)^2 \ge 0$, czyli $10x^3 \le x^4 + 13x^2 + 60x + 36$. Dodając do nierówności (1) nierówność

$$10\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + 13\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 60\sum_{i=1}^{n} x_i + 36\sum_{i=1}^{n} 1,$$

otrzymujemy

$$10\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \le 37n + n^2 + 55\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

czyli słabą wersję nierówności (2).

W ostatniej nierówności może zajść równość tylko wtedy, gdy

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + 13\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 5\sum_{i=1}^{n} x_i = n + n^2$$

oraz $10x_i^3 = x_i^4 + 13x_i^2 + 60x_i + 36$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, czyli gdy $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \{-1, 6\}$.

Równość (3) przyjmuje postać

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^4 + 13x_i^2 + 5x_i - 1) = n^2,$$

gdzie $x_i^4 + 13x_i^2 + 5x_i - 1 \in \{8, 1793\}$. Twierdzenie jest więc fałszywe dla tych n, dla których n^2 jest sumą n liczb, z których każda jest równa 8 lub 1793. Takie n musi spełniać nierówność $8 \le n \le 1793$. Jeśli n^2 jest sumą k liczb równych 1793 i $n-k$ liczb równych 8, to $n^2 = 1793k + 8(n-k)$, czyli $n(n-8) = 1785k$, skąd widać, że należy wziąć $k = \frac{n(n-8)}{1785}$, o ile jest to liczba całkowita.

Zatem twierdzenie jest fałszywe dla tych $n \in \{8, 9, \ldots, 1793\}$, dla których $n(n-8)$ dzieli się przez $1785 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (8)

ZADANIE: Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+\sin x}{e^x-2x-1}$.

Rozwiązanie: Mamy do czynienia z wyrażeniem nieoznaczonym $\frac{0}{0}$. Dwukrotne zastosowanie reguły de l'Hospitala daje:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\sin x}{e^x-2x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+\cos x}{e^x-2} = \lim_{x\to 0} \frac{2-\sin x}{e^x} = 2.$$

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (9)

ZADANIE: Niech $a_1 = 99$, $a_2 = 199$, $a_3 = 400$ oraz $a_n = 6a_{n-1} - 13a_{n-2} + 10a_{n-3}$ dla $n \ge 4$. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Rozwiązanie: Oznaczmy szukaną granicę przez g. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g \cdot g = g^2$ i podobnie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+3}}{a_n} = g^3$. Z drugiej strony $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+3}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6a_{n+2}-13a_{n+1}+10a_n}{a_n} = 6g^2 - 13g + 10$, skąd $g^3 = 6g^2 - 13g + 10$. Jedynym rozwiązaniem tego równania jest $g = 2$.

Odpowiedź: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

JWR

CYFROMANIA (7)

Jesteśmy już wystarczająco zaawansowani w naszych rozważaniach, aby rozwiązać następujące zadanie z obozu przygotowawczego do Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej:

ZADANIE: Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że 2^n w zapisie dziesiętnym ma końcówkę n, tzn. $10^k | 2^n - n$, gdzie $k = [\log_{10} n] + 1$.

Rozwiązanie: Wykażemy, że dla każdego $k \ge 2$ istnieje takie $n_k < 10^k$, iż $10^k | 2^{n_k} - n_k$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że $n_2 = 36$ spełnia powyższy warunek, gdyż $2^{36} = 68719476736$. Dla $k \ge 2$ końcówka $(k+1)$-cyfrowa liczby 2^n zależy tylko od k-cyfrowej końcówki liczby n (o ile $n \ge k+1$). Tak więc wszystkie liczby postaci $2^{100l+36}$ mają taką samą końcówkę 3-cyfrową. Zatem $n_3 = 736$. Podobnie n_4 jest 4-cyfrową końcówką liczby 2^{n_3} itd.

Aby stwierdzić, że w ten sposób otrzymamy n_k, spełniające warunek $10^k | 2^{n_k} - n_k$, należy zauważyć, iż $n_k \ge k+1$. Istotnie, skoro $2^k | 2^{n_k} - n_k$ oraz $2^{n_k} > n_k$, to $2^{n_k} - n_k \ge 2^k$, skąd $2^{n_k} > 2^k$ i $n_k > k$. Można wykazać, że w powyższy sposób otrzymamy wszystkie liczby spełniające warunki zadania.

Bezpośrednie obliczenia pokazują, że np. $n_{14} = n_{15} = 75353432948736$, nie ma więc liczby 15-cyfrowej spełniającej warunki podane w zadaniu. Podamy jeszcze wartość

$$n_{50} = 24570145528696872600159853338098615075353432948736.$$

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl