Pan **Piotr Kumor** z Olsztyna w swoim liście przedstawia rozwiązanie problemu obliczenia objętości bryły opisanej w notce *Inne spojrzenie* z *Delty* 1/1998. Przypomnijmy, że chodzi o bryłę powstałą w przecięciu dwóch naroży prostopadłościennych umieszczonych tak, że ich osie obrotowe pokrywają się, ponadto wierzchołek każdego jest zawarty we wnętrzu pozostałego naroża. Bryła taka to wielościan o sześciu jednakowych ścianach. Jego ściany mają co najwyżej cztery boki i co najmniej jeden kąt prosty, przy czym przyległe do niego boki są równej długości. Szczególnym przypadkiem takiego wielościanu jest np. sześcian; w innym szczególnym przypadku ściany są równoramiennymi trójkątami prostokątnymi.

Rozwiązanie zaproponowane przez Pana Kumora uzależnia wynik od jednego parametru. Zakłada się mianowicie, że wyjściową bryłą jest sześcian o krawędzi 1, a raczej jego przeciwległe naroża. Wszystkie interesujące nas bryły to przecięcia jednego nieruchomego naroża (dalej będzie to naroże o wierzchołku A) z narożem powstałym z obrotu przeciwległego naroża wokół przekątnej sześcianu o jakiś kąt – kąt ten będzie dalej oznaczany α. Można przy tym założyć, że $0 \le \alpha \le 60°$ (bo dla większych kątów sytuacja się powtarza).

Pan Kumor czyni bardzo naturalne spostrzeżenie, że środek sześcianu jest jednakowo położony względem każdej z (przystających) ścian badanej bryły. Jego odległość od ściany jest taka sama jak w sześcianie, czyli równa $\frac{1}{2}$. Można zatem badaną bryłę potraktować jako sumę sześciu przystających ostrosłupów o wierzchołku w środku wyjściowego sześcianu mających rozłączne wnętrza. Liczbowo poszukiwana objętość jest więc równa

$$6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\text{pole ściany badanej bryły}),$$

czyli po prostu polu ściany. Zatem pozostaje obliczyć to pole.

Ponieważ list Pana Kumora jest sformułowany bardzo lapidarnie, więc będziemy go tu naśladować, pozostawiając Czytelnikom sprawdzenie poprawności i celowości rozumowania. Zgodnie z intencją Autora nie proponujemy żadnych rysunków.

Niech rozpatrywany sześcian będzie miał jako wierzchołki punkty $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (1,1,0)$, $D = (0,1,0)$, $A' = (0,0,1)$, $B' = (1,0,1)$, $C' = (1,1,1)$, $D' = (0,1,1)$. Na początku zajmiemy się okręgiem opisanym na trójkącie równobocznym $A'BD$. Jego środkiem jest $P = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Gdy oznaczymy przez $Q = (x, y, z)$ jego punkt powstały z obrotu punktu A' wokół prostej AC' o kąt α, to współrzędne wektora $\overrightarrow{PQ} := (x_1, y_1, z_1) = \left(x - \frac{1}{3}, y - \frac{1}{3}, z - \frac{1}{3}\right)$ spełniać będą układ równań

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \frac{2}{3} \\ 2z_1 - y_1 - x_1 = 2\cos\alpha \end{cases}$$

(pierwsze równanie to równanie płaszczyzny $A'BD$, drugie to kwadrat długości promienia, trzecie to – z definicji – iloczyn skalarny $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PA'}$). Otrzymuje się stąd, że punkt Q ma współrzędne

$$x = \frac{1 - \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}{3},$$
$$y = \frac{1 - \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}{3},$$
$$z = \frac{1 + 2\cos\alpha}{3}.$$

Zatem prosta AQ przecina płaszczyznę $A'B'C'D'$ (o równaniu $z = 1$) w punkcie

$$M = \left(\frac{1 - \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}{1 + 2\cos\alpha}, \frac{1 - \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}{1 + 2\cos\alpha}, 1\right).$$

Analogicznie znajdujemy punkt R powstały z obrotu punktu B wokół prostej AC' o kąt α i punkt przecięcia prostej AR z płaszczyzną $BCC'B'$ (o równaniu $x = 1$)

$$L = \left(1, \frac{1 - \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}{1 + 2\cos\alpha}, \frac{1 - \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}{1 + 2\cos\alpha}\right).$$

Czwartym wierzchołkiem rozważanej ściany będzie punkt przecięcia prostej $B'C'$ (o równaniu $x = 1 = z$) z płaszczyzną AML; oznaczmy go N. Oczywiście istnieją takie liczby p i q, że

$$\overrightarrow{AN} = p \cdot \overrightarrow{AM} + q \cdot \overrightarrow{AL},$$

które można obliczyć wobec tego z równań

$$\begin{cases} p \cdot \frac{1-\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}{1+2\cos\alpha} + q = 1 \\ p + q \cdot \frac{1-\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}{1+2\cos\alpha} = 1 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu i podstawieniu otrzymujemy

$$N = \left(1, \frac{2\cos\alpha - 2}{1 + 2\cos\alpha}, 1\right).$$

Dla obliczenia pola (przeważnie) czworokąta $AMNL$ rozbijamy go na trójkąty i rachujemy za pomocą wyznaczników lub – co na jedno wychodzi – iloczynów wektorowych pole AMN i ANL. Np.

$$P_{AMNL} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AN} \times \overrightarrow{AL}\right| = \frac{1}{2}\left|(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL}) \times \overrightarrow{AN}\right|.$$

Po przerachowaniu otrzymujemy

$$\frac{9\cos\alpha}{(1 + 2\cos\alpha)^2}$$

i tyle właśnie wynosi poszukiwana objętość bryły.

A może ktoś umie uporać się z tym prościej?

Redakcja