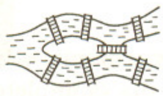
Z historii zadań konkursowych



Zadanie z dalszym ciągiem

495. *Czy równanie* $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=1$ *ma rozwiązanie w liczbach całkowitych?*
Uwaga. Autor nie zna rozwiązania.

Werner Mnich, Nr 1 (1957), str. 55

Uczestnikom konkursu zadaniowego nie udało się rozwiązać tego zadania. Wacław Sierpiński zauważył, że problem ten jest równoważny pytaniu: czy istnieją takie liczby wymierne r, s, t, że

$$r+s+t=rst=1. \tag{$*$}$$

W. Sierpiński mówił autorowi zadania, że nie rozumie, dlaczego nikt wcześniej nie postawił tak prostego pytania.

Wcale nieelementarne negatywne rozwiązanie zagadnienia podał znany specjalista teorii liczb, J.W.S. Cassels, w pracy *On a diophantine equation,* Acta Aritmetica VI (1960), 47–52.

Łatwo pokazać, że problem jest równoważny pytaniu: czy istnieje taka liczba wymierna r, że wszystkie pierwiastki równania $x^3-x^2+rx-1=0$ są liczbami wymiernymi. Można też udowodnić, że jest to równoważne pytaniu: czy istnieją takie liczby całkowite x, y, z, że $xyz \neq 0$ i $x^3+y^3+z^3=xyz$.

Problem omawiany dał impuls różnym uogólnieniom – badano równanie ($*$) nad ciałami kwadratowymi. Zajmowano się też układem kongruencji

$$x_1+x_2+x_3 \equiv 1 \pmod{p}, \quad x_1x_2x_3 \equiv 1 \pmod{p},$$

gdzie p – liczba pierwsza nieparzysta.

Zadanie tysięczne!

1000. *Znaleźć liczbę złożoną, która pozostaje złożoną przy każdej zmianie którychkolwiek dwóch jej cyfr.*

W. S. (Wacław Sierpiński), Nr 1 (1977), str. 55

Zadanie to, przekazane *Matematyce* już w 1958 roku, opublikowane po 19 latach (bo tyle było w zapasie zadań Sierpińskiego!), nie zostało rozwiązane przez żadnego z uczestników konkursu i zostało uznane za beznadziejne. Jego uogólnienie ukazało się w *Matematyce* 1 w 1989 roku jako zadanie 1238 (znów bez rezultatu) i ponownie w numerze 4, 1994 jako zadanie 1326. Łatwiejsza wersja zadania znalazła się w *Matematyce* 4, 1995 pod nr. 1356.
To ostatnie zostało w końcu rozwiązane i to aż przez 16 uczestników konkursu; rozwiązanie Jerzego Witkowskiego wydrukowano w nr. 3, 1996 na str. 182.

Dwa zadania, które wydają się naturalne, a nie udało się ich rozwiązać

720. *Kwadrat. Czy można znaleźć kwadrat o bokach całkowitych i taki punkt na płaszczyźnie kwadratu, którego cztery odległości od wierzchołków wszystkie byłyby całkowite?*

H. St. (Hugo Steinhaus), Nr 5 (1963), str. 208

Jest zresztą kilka innych zadań Steinhausa dotąd nie rozwiązanych (p. książka *Sto zadań*).

1292. *Podział przestrzeni. Przestrzeń trójwymiarową podzielono na cztery niepuste, parami rozłączne zbiory. Czy co najmniej jeden z tych zbiorów zawiera trzy punkty będące wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku 1?*

Werner Mnich, Nr 3 (1993), str. 172

Zadanie z wpadką

781. *Dowieść, że równanie* $x^4+y^4=z^4+1$ *nie posiada rozwiązań w różnych liczbach naturalnych* x, y, z.

Jan Antonik, Nr 3 (1966), str.142

Rzekome rozwiązanie jest w nr. 1–2 (1969), str. 76–78. Jest ono wadliwe, jak pokazano w nr. 3 (1972), str. 182. Kilka lat temu Andrzej Schinzel pisał do mnie, że rzecz jest dalej otwarta, podobnie jak sprawa równania $x^4+y^4=z^4+2$.

Może Czytelnicy *Delty* rozwiążą te zadania?

Werner MNICH

czasopismo dla nauczycieli
MATEMATYKA