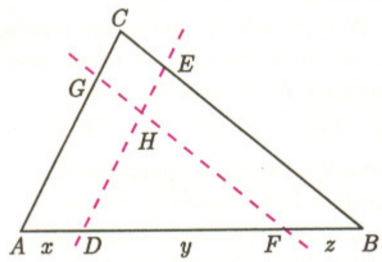
czasopismo dla nauczycieli

MATEMATYKA

Podział trójkąta

W książce M. Karpińskiego i J. Lecha *Geometria dla klasy II*, na str. 32 jest zadanie 93 następującej treści:

Prowadzimy dwie proste równoległe do dwóch boków trójkąta tak, że dzielą one trójkąt na cztery części o równych polach. Znajdź długości odcinków, na które proste te dzielą trzeci bok, jeśli jego długość wynosi 2.



$|AB| = 2$, $P_{\triangle ABC} = S$

ROZWIĄZANIE
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Kluczowa jest tu własność: stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Mamy:

(1) $\triangle DBE \equiv \triangle AFG$,

(2) i oba są podobne do $\triangle ABC$ w skali $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(3) Również $\triangle DFH \sim \triangle ABC$ ze skalą podobieństwa $m = \frac{1}{2}$.

SPOSÓB I
Z podobieństwa (3) mamy $y = \frac{1}{2}|AB| = 1$, a z podobieństwa (2):
$x + y = \frac{1}{\sqrt{2}}|AB| = \sqrt{2}$, stąd $x = \sqrt{2} - 1$, oraz $z = |AB| - (x + y) = 2 - \sqrt{2}$.

Odpowiedź: $x = \sqrt{2} - 1$, $y = 1$, $z = 2 - \sqrt{2}$.

SPOSÓB II
Z podobieństwa (3) mamy $y = \frac{1}{2}|AB| = 1$, a z przystawania (1) wynika, że $x + y = z + y$, zatem $x = z = \frac{1}{2}$.

SPOSÓB III
Z podobieństwa (2): $x + y = \frac{1}{\sqrt{2}}|AB| = \sqrt{2}$, czyli $z = 2 - \sqrt{2}$. Z (1) mamy $x = z$, zatem $y = \sqrt{2} - x = 2\sqrt{2} - 2$.

Każdy sposób jest poprawny i każdy daje inny wynik! Jak to możliwe?!

Trzy rozumowania, startując z tych samych przesłanek, wiodą do sprzecznych odpowiedzi! Jeśli rozumowania są poprawne – a są (są na tyle krótkie, że łatwo je można dokładnie sprawdzić) – to jedyny stąd wniosek, że przesłanki zadania są sprzeczne – nie zachodzi opisana w nich sytuacja.

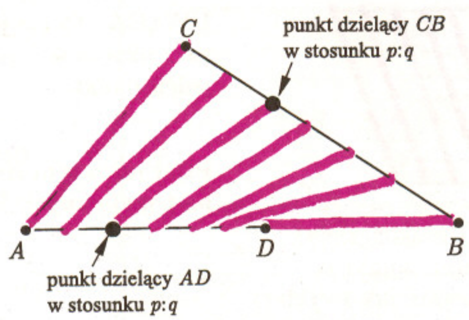
Powyższy wywód logiczny zapewne nie przekona zbyt wielu uczniów. Zatem rozwiążmy dodatkowo następujące zadanie; pomoże to wyjaśnić powyższą zagadkę.

ZADANIE. *W trójkącie o polu S poprowadzono dwie proste równoległe do dwóch boków, z których każda dzieli trójkąt na dwie figury o równych polach. Obliczyć pole równoległoboku, który powstał przy wierzchołku.*

Choć w pierwszej chwili wydaje się to niemożliwe, jednak **trójkąt można zakreskować.**

Kreski mają końce na odcinkach AD i CB.

Końce danej kreski dzielą AD i CB (odpowiednio) w tym samym stosunku.



ĆWICZENIE.
Jak można zakreskować pięciokąt i sześciokąt foremny?

A jak czworokąt wklęsły?

Ale

czy można zakreskować koło?

Kreskówki cd. str. 3

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku i korzystamy z poprzednich wyników:

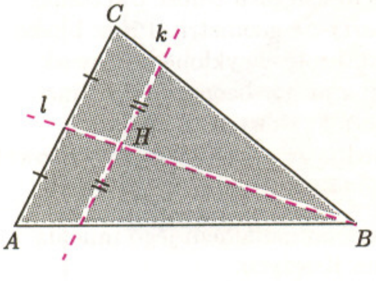
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \quad (\text{gdzie } a = |BC|,\ b = |AC|),$$

$$|BE| = \frac{1}{\sqrt{2}}|BC| = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow |EC| = a\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}},$$

analogicznie

$$|GC| = b\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Pole}_{GHEC} = |EC|\cdot|GC|\cdot\sin\gamma = ab\sin\gamma\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2} = S\cdot(\sqrt{2}-1)^2 \neq \frac{1}{4}S.$$



WNIOSEK: Pola otrzymanych czterech figur są dokładnie określone. Nie istnieje podział, o którym jest mowa w pierwszym zadaniu. Założenie jest fałszywe. A z fałszu może wyniknąć wszystko.

Na koniec zauważmy „coś pozytywnego”:
Dla prostej $k \parallel AC$, połowiącej pole trójkąta, można znaleźć taką prostą l (nierównoległą do BC!), że razem dzielą trójkąt ABC na cztery części o równych polach – jest nią prosta zawierająca środkową trójkąta wychodzącą z wierzchołka B (tw. Talesa).

Żadna inna prosta tego warunku nie spełnia!

Jest tak dlatego, że dla każdej innej prostej l', jeśli nie przechodzi ona przez H, to któryś z czterech obszarów, jakie powstały dzięki k i l, jest zawarty (istotnie) w jednej z części podziału wyznaczonego przez k i l'. Jeśli natomiast l' przechodzi przez H, to odcina od któregoś z „kawałków” część o polu mniejszym niż $\frac{1}{4}S$.
Co więcej: jeżeli jakaś para prostych k, l (już nie ma mowy o równoległości) rozcina trójkąt na 4 części o równych polach, to każda z nich wyznacza tę drugą jednoznacznie. (Dowód jest ten sam!). Ponadto: to, że wyjściowa figura jest trójkątem, nie jest tu istotne – wystarczy założyć, że jest wypukła.

Tak się rodzą ogólne twierdzenia.

A czy dla każdej prostej k połowiącej trójkąt można znaleźć taką prostą l, by razem podzieliły trójkąt na 4 równe części? TAK – dotarliśmy do znanego twierdzenia „o kanapkach”*).

Olga STANDE

*) Porównaj R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka*, rozdz. VI §6.1 PWN, Warszawa 1959 oraz M. Szurek, *Opowieści geometryczne*, WSiP, Warszawa 1995, rozdz. 12.5.

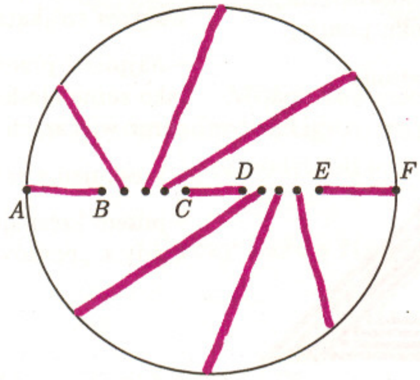
Zadziwiające,
koło można zakreskować!

Na ustalonej średnicy rysujemy trzy kreski: AB, CD, EF (patrz rysunek) i

– punkty odcinka BC (bez końców) łączymy kreskami z punktami górnego półokręgu,

natomiast

– punkty odcinka DE (bez końców) łączymy kreskami z punktami dolnego półokręgu.



Ale

czy można zakreskować trójkąt bez brzegu?

a wnętrze koła?

UWAGA: Kreski – tak jak poprzednio – powinny być z końcami!

Kreskówki cd. str. 4