Masłem na dół

Złośliwość przedmiotów martwych jest tematem wielu celnych powiedzonek sformułowanych w stylu szczególnych „praw przyrody” – praw Murphy’ego [1]. Jedno z powszechniej znanych wyraża przekonanie, że spadające kanapki zawsze lądują masłem do podłogi. Problem ten był, oczywiście, przedmiotem analiz, a nawet został uogólniony na „dowolny wszechświat” [2]. Doświadczenia przeprowadzone w rozmaitych warunkach oraz obliczenia pozwalają zweryfikować pogląd o złośliwości kanapki jako zbyt pesymistyczny.

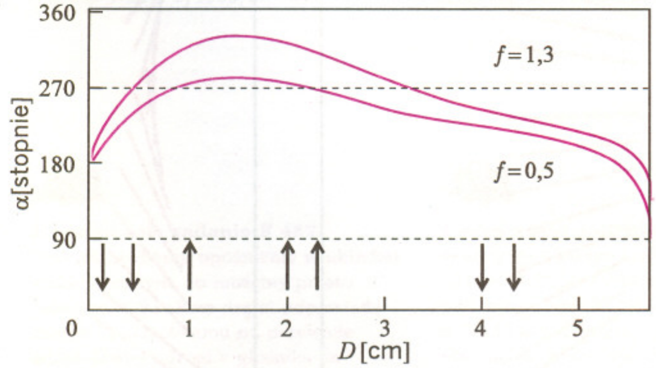
Na sposób upadku kanapki ma wpływ bardzo wiele czynników: jej kształt, masa, moment bezwładności, własności sprężyste, *sposób odkładania*, stan powierzchni stołu i jego wysokość. Niektóre z nich trudno kontrolować, więc aby poprawić nieco powtarzalność wyników, do eksperymentów dobrze jest użyć kromek o regularnym kształcie, na przykład z pumpernikla.

Podstawowe cechy zachowania się spadającej kanapki można poznać dzięki symulacji numerycznej. Ponieważ niektóre z wymienionych czynników są trudne do ujęcia w rachunkach, przyjmiemy tu uproszczony model kanapki w kształcie cienkiego, sztywnego prostopadłościanu, z wyróżnioną („posmarowaną”) górną ścianą. Uściślimy też warunki, w jakich dochodzi do upadku kanapki.

PRZYPADEK 1. Kładziemy nieostrożnie kanapkę na stole, poziomo, i tak, że jej środek ciężkości wystaje poza jego krawędź. Zakładamy przy tym, że robimy to bardzo powoli (jak zwykle zamyśleni albo zaczytani).

PRZYPADEK 2. Trącamy z rozmachem kanapkę leżącą na stole, tak, że zaczyna sunąć po powierzchni w kierunku prostopadłym do krawędzi (rzut poziomy kanapką).

Ograniczymy się do przypadków, w których krótsza krawędź podstawy jest zawsze równoległa do krawędzi stołu. Warunki początkowe określone są odległością D środka ciężkości od krawędzi (w przypadku 1) lub prędkością początkową środka V_0 w momencie mijania krawędzi (w przypadku 2).



Rys. 1. Zależność kąta upadku α od położenia początkowego D dla współczynników tarcia 0,5 i 1,3. Strzałki pokazują stwierdzone doświadczalnie sposoby lądowania kanapki przy spadku z drewnianego blatu.

Przyjmiemy parametry kanapki przygotowanej z pumpernikla: szerokość 8 cm, długość 11,5 cm, grubość 0,6 cm, masa 40 g. Współczynnik tarcia o stół f można wziąć z przedziału od 0,5 (gładki blat) do 1,3 (lniany obrus). Wybierzmy typową wysokość stołu 80 cm.

W ruchu kromki powoli odkładanej (przypadek 1) można wyróżnić następujące etapy:
– obrót wokół krawędzi stołu,
– zsuwanie się połączone z obrotem w stałym kontakcie z krawędzią, która pełni rolę chwilowej osi obrotu,
– lot swobodny (opór powietrza pomijamy) z jednostajnym obrotem.

Podczas spadku kanapki strącanej (przypadek 2) pierwszy etap nie występuje. Zderzenie z podłogą traktujemy jako doskonale niesprężyste. Kanapka upadnie więc na podłogę stroną posmarowaną, gdy zdąży przyjąć położenie określone kątem większym niż $\pi/2$, ale nie przekraczającym $3\pi/2$. (Ogólnie – gdy kąt upadku pochodzi z przedziałów $((2n+1)\pi/2, (2n+3)\pi/2)$, $n = 1, 2, \ldots$ Kąt mierzymy względem płaszczyzny stołu. Jego wartości przyjmowane podczas spadku rozpoczynającego się od pozycji poziomej definiujemy jako dodatnie.)

Z obliczeń (a także z obserwacji) wynikają następujące prawidłowości.

W PRZYPADKU 1

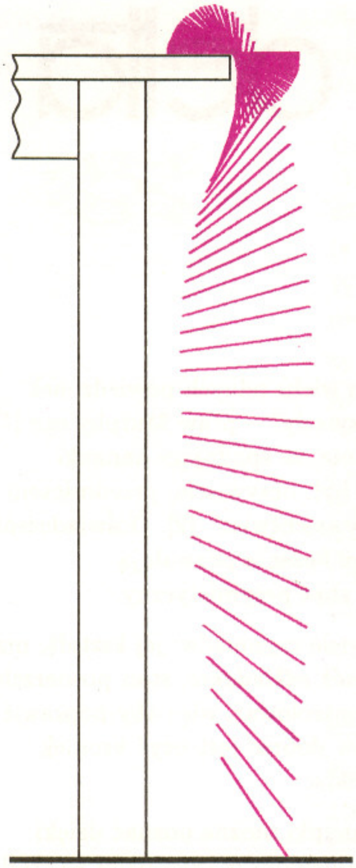
– kanapka upada masłem na dół przy dostatecznie małych lub dostatecznie dużych wartościach D, a masłem do góry – przy wartościach pośrednich,

– przedział odległości D, przy których kanapka upada masłem do góry, poszerza się przy wzroście tarcia.

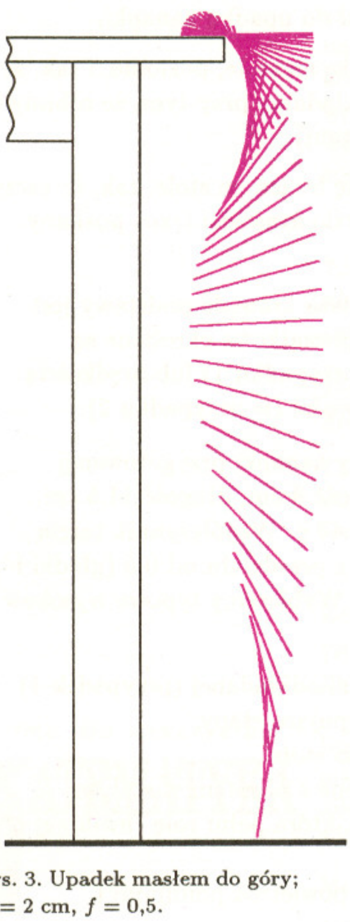
Można rozważyć uogólnienie przypadku 1: odkładanie kanapki nie poziomo, lecz ukośnie. Warunki początkowe zadane są wtedy kątem początkowym α_0 oraz parametrem D, który określa w tych przypadkach położenie środka ciężkości w chwili, gdy kanapka styka się po raz pierwszy z krawędzią stołu. Dwie możliwości – nachylenie pod kątem dodatnim i ujemnym – dają istotne różnice w zachowaniu się kanapki względem wariantu poziomego:

– zadarcie końca kanapki do góry ($\alpha_0 < 0$) sprzyja jej obrotowi, a więc upadkowi masłem do góry,

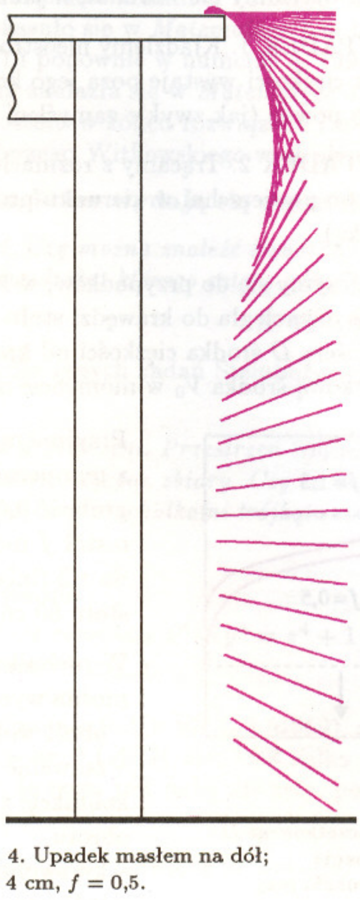
– pochylenie końca ku dołowi ($\alpha_0 > 0$) ogranicza obrót i może doprowadzić do upadku masłem na dół.



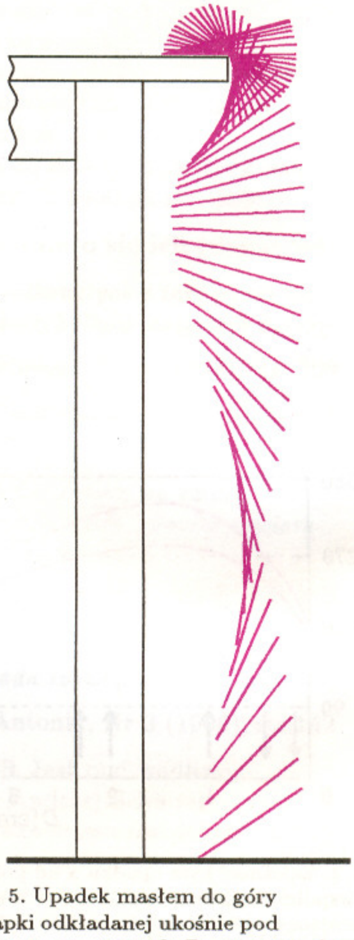
Rys. 2. Upadek masłem na dół; $D = 0{,}2$ cm, $f = 1{,}3$.



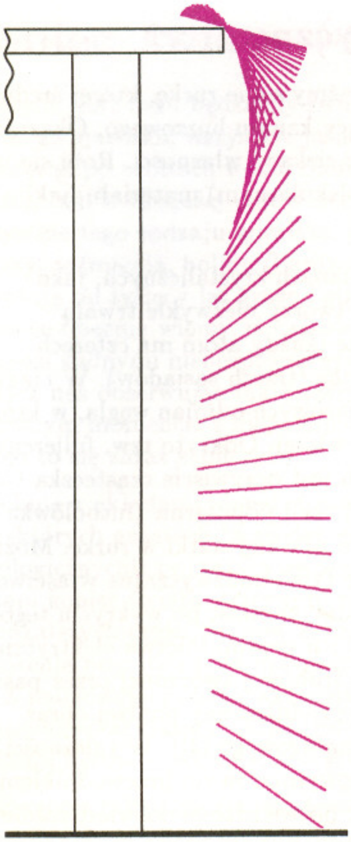
Rys. 3. Upadek masłem do góry; $D = 2$ cm, $f = 0{,}5$.



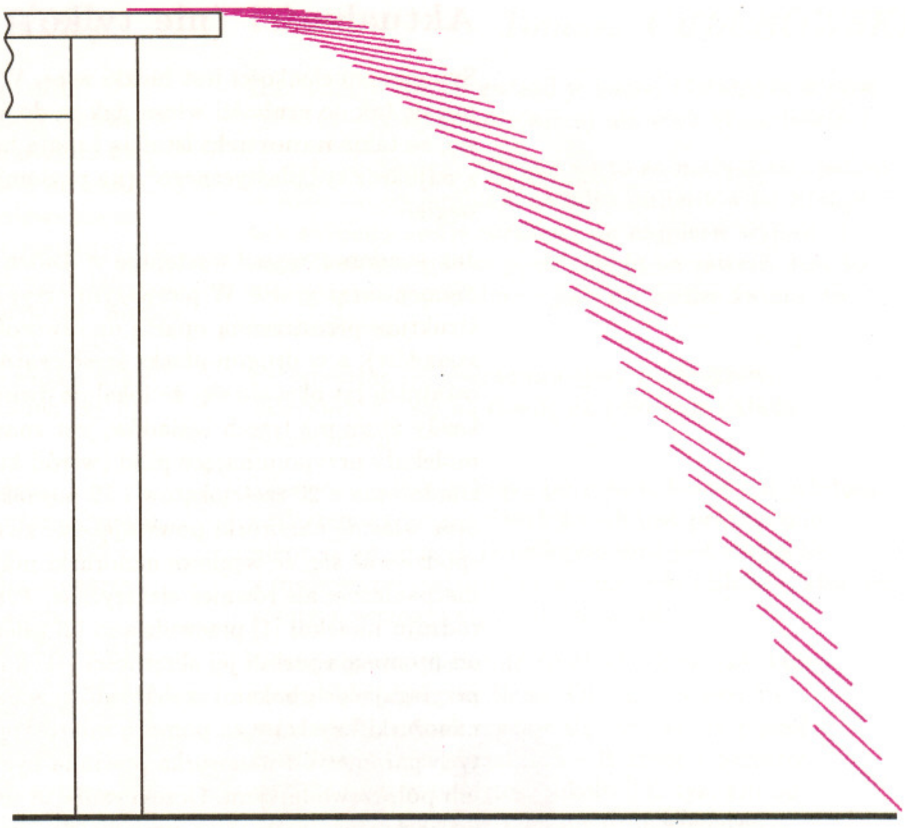
Rys. 4. Upadek masłem na dół; $D = 4$ cm, $f = 0{,}5$.



Rys. 5. Upadek masłem do góry kanapki odkładanej ukośnie pod kątem $\alpha_0 = -0{,}3$ rad; $D = 0{,}2$ cm, $f = 1{,}3$.



Rys. 6. Upadek masłem na dół kanapki odkładanej ukośnie pod kątem $\alpha_0 = 0{,}3$ rad; $D = 2$ cm, $f = 0{,}5$.



Rys. 7. Lot kanapki strąconej z prędkością; $V_0 = 150$ cm/s, $f = 0{,}5$.

W PRZYPADKU 2

– istnieje graniczna prędkość, poniżej której kanapka upada masłem na dół. W naszym przypadku wynosi ona około 85 cm/s przy $f = 0{,}5$,

– im większa prędkość, tym krócej kanapka styka się z krawędzią stołu, tym mniej czasu ma na nabranie prędkości kątowej i upada pod tym mniejszym kątem – tyle że daleko.

Prawidłowości te są zilustrowane rysunkami 1–7.

Podsumowanie uzyskanych wyników pozwala wysnuć wniosek, że okazji do wylądowania masłem do góry kanapka ma wiele. Zła opinia o przebiegu tego zjawiska ma swoje uzasadnienie raczej w psychicznym nastawieniu, skłaniającym nas do zwracania większej uwagi na zdarzenia niekorzystne.

Małą Deltę przygotował Grzegorz DERFEL

Literatura

[1] A. Bloch, *Dlaczego w życiu nic nie może się udać, czyli prawa Murphy'ego*, OPTIMA Press, Warszawa 1992.

[2] I. Stewart, *Zasada antropomurphiczna*, Świat Nauki 2/1996, str. 82.

Rozwiązanie zadania F 482.

Jeśli zaniedbamy opóźnienie w układzie elektronicznym, to możemy prosto oszacować, że okres drgań odpowiada czasowi potrzebnemu na przebycie przez dźwięki drogi z głośnika do mikrofonu. Oznaczając prędkość dźwięku przez $v = 340$ m/s, otrzymujemy, że częstotliwość powstałego dźwięku wynosi $\nu \approx v/l = 113$ Hz.

Rozwiązanie zadania M 855.

Weźmy pod uwagę liczby n, $n+1$, $n+2, \ldots, n+10$. Wtedy $n^2 + (n+1)^2 + \ldots + (n+10)^2 = 11n^2 + 110n + 385 = 11(n^2 + 10n + 35)$. Jak łatwo zauważyć, liczba $n^2 + 10n + 35$ musi być podzielna przez 11. Nietrudno sprawdzić, że wtedy n musi być postaci $11k+5$ lub $11k+7$. Np. dla $n = 11k+5$ mamy $11(n^2+10n+35) = 11^2(11k^2+20k+10)$. Teraz można już próbować trafić: $k=1$ nie pasuje, $k=2$ też, ale za to $k=3$ jest wyśmienite – istotnie $11 \cdot 3^2 + 20 \cdot 3 + 10 = 13^2$.
A więc ostatecznie mamy przykład: $38^2 + 39^2 + \ldots + 48^2 = (11 \cdot 13)^2$. Czy jedyny?

Uwaga. Proponuję Czytelnikom następujące rozwinięcie problemu: *Udowodnić, że dla $2 < n < 11$ nie istnieje n kolejnych liczb naturalnych, których suma kwadratów jest też kwadratem liczby naturalnej.*
Da się to zrobić w skończonym czasie.