Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 351 (WT=1,27) i 352 (WT=2,55) z numeru 12/1997

Maciej Mostowski	– Warszawa	42,81
Konrad Patkowski	– Gdańsk	40,09
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	39,37
Piotr Kumor	– Olsztyn	39,21
Witold Bednarek	– Łódź	32,66
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	32,41
Zbigniew Skalik	– Pyskowice	32,15

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1998

Przypominamy treść zadań:

359. Czy istnieje para funkcji $f,\ g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ spełniających dla każdej liczby $x\in\mathbf{R}$ równania $f(g(x)) = x^2$ oraz $g(f(x)) = x^4$?

360. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2n+1}$ o następującej własności: po odrzuceniu dowolnego wyrazu pozostałe można podzielić na takie dwie grupy po n wyrazów, że suma wyrazów w pierwszej grupie jest równa sumie wyrazów w drugiej. Dowieść, że wszystkie wyrazy ciągu są równe.

359. Poszukiwanie pary funkcji o podanych własnościach może ułatwić podstawienie $x = 2^{2^t}$; to ogranicza (chwilowo) zakres zmienności x do przedziału $(1,\infty)$. Przypuśćmy więc, że $f,g\colon(1,\infty)\to(1,\infty)$ są funkcjami spełniającymi zadane równania i przyjmijmy

$$\varphi(t) = \log_2\log_2 f(2^{2^t}), \qquad \psi(t) = \log_2\log_2 g(2^{2^t}) \qquad \text{dla } t\in\mathbf{R}.$$

Te funkcje spełniają układ równań funkcyjnych: $\varphi(\psi(t)) = t+1$ oraz $\psi(\varphi(t)) = t+2$; ma on rozwiązania nawet w klasie par funkcji liniowych. Postulując postać $\varphi(t) = at+b$, $\psi(t) = ct+d$, otrzymujemy dla parametrów a,b,c,d warunki: $a=1/2$, $c=2$, $2b+d=2$. Biorąc na przykład $b=1$, $d=0$, dostajemy $\varphi(t) = (t+2)/2$, $\psi(t) = 2t$, co daje parę funkcji

$$f(x) = 2^{2\sqrt{\log_2 x}}, \qquad g(x) = 2^{(\log_2 x)^2} \qquad \text{dla } x>1.$$

Aby rozszerzyć te funkcje na cały zbiór $\mathbf{R}$, wystarczy przyjąć

$$f(x) = 1/f(1/x), \qquad g(x) = 1/g(1/x) \qquad \text{dla } x\in(0,1)$$

oraz $f(1) = g(1) = 1$, a następnie przedłużyć f i g do funkcji parzystych, określonych na $\mathbf{R}$. Nietrudno sprawdzić, że tak rozszerzone funkcje spełniają wymagane warunki.

360. Dla liczb całkowitych a_i twierdzenie to było kiedyś zadaniem na Olimpiadzie Matematycznej – możemy je więc uważać za znane. (Notka z odsyłaczem była dołączona do treści zadania w *Delcie* 4/1998.) Natychmiastowym wnioskiem jest prawdziwość twierdzenia dla liczb wymiernych a_i; wystarczy je wszystkie pomnożyć przez wspólny mianownik.

Niech teraz $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2n+1}$ będą liczbami rzeczywistymi o podanej własności i niech m będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której istnieją w zbiorze $K = \{1,2,\ldots,2n+1\}$ różne numery $k_1,\ldots,k_m$, takie, że każdą z liczb a_i da się przedstawić w postaci kombinacji liniowej

$$(*)\qquad a_i = r_{i,1}a_{k_1} + \ldots + r_{i,m}a_{k_m} = \sum_{s=1}^{m} r_{i,s}a_{k_s}$$

o wymiernych współczynnikach $r_{i,s}$. (Innymi słowy, m jest wymiarem przestrzeni liniowej nad ciałem liczb wymiernych, generowanej przez liczby $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2n+1}$.) Z minimalności liczby m wynika, że przedstawienie $(*)$ jest wówczas jednoznaczne.

Weźmy dowolny numer $l\in K$. Zgodnie z warunkiem zadania, zbiór $K\setminus\{l\}$ jest sumą n-elementowych zbiorów I oraz J, takich, że

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in J} a_i.$$

Zastępując każdą z liczb a_i jej przedstawieniem $(*)$, otrzymujemy (po przegrupowaniu składników) równość

$$\sum_{s=1}^{m}\Bigl(\sum_{i\in I} r_{i,s} - \sum_{i\in J} r_{i,s}\Bigr)a_{k_s} = 0.$$

Przedstawienie liczby 0 jako wymiernej kombinacji liniowej liczb a_{k_s} jest jednoznaczne, więc wyrażenie w nawiasie ma dla każdego s wartość 0. To znaczy, że dla każdego $s\in\{1,\ldots,m\}$ ciąg liczb wymiernych $r_{1,s},\ r_{2,s},\ \ldots,\ r_{2n+1,s}$ ma własność, o której mowa w zadaniu (po odrzuceniu dowolnego wyrazu $r_{l,s}$ pozostałe można podzielić itd.). W myśl uwagi rozpoczynającej rozwiązanie, liczby te są równe:

$$r_{1,s} = r_{2,s} = \ldots = r_{2n+1,s} \qquad \text{dla } s = 1,\ldots,m.$$

Ze wzoru $(*)$ dostajemy żądany wniosek, że liczby $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2n+1}$ są równe.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 252 (WT=1,73) i 253 (WT=2,76) z numeru 2/1998

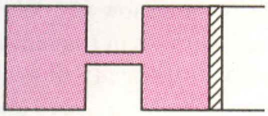
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	39,55
Tomasz Wietecha	– Tarnów	19,88
Marek Wójcicki	– Szczecin	18,37
Aleksander Surma	– Myszków	12,50

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1998

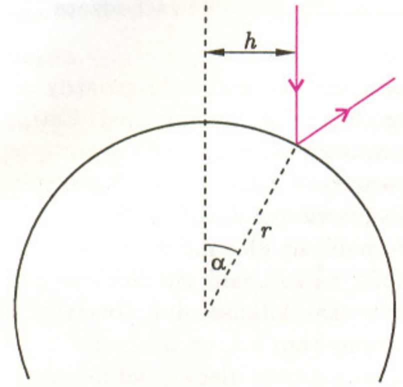
Przypominamy treść zadań:

256. Jednorodny strumień równolegle biegnących cząstek (np. strumień światła) pada na kulę: a) odbijającą cząstki sprężyście (zwierciadło kuliste), b) taką, do której cząstki się „przyklejają" (czarną). Jeżeli promień kul jest jednakowy, to na którą z nich działa większa siła? A może siły są jednakowe?



Rys. 1

257. Naczynie z gazem jest izolowane termicznie od otoczenia i przedzielone na dwie części, z których jedna jest zamknięta tłokiem wywierającym na gaz stałe ciśnienie p (rys. 1). Jeżeli grzałka elektryczna dostarczy do wnętrza pewną ustaloną ilość ciepła Q, to w którym przypadku tłok przesunie się bardziej:
a) gdy podgrzejemy lewą część naczynia,
b) gdy podgrzejemy prawą część naczynia,
c) gdy połowę ciepła dostarczymy lewej części, a połowę – prawej?
Kanalik łączący obie części naczynia jest tak wąski, że temperatura nie ulega wyrównaniu.



Rys. 2

256. W przypadku a) cząstka biegnąca torem przesuniętym względem środka o h (rys. 2) odbija się pod kątem $\alpha = \arcsin(h/r)$. Pionowa składowa pędu tej cząstki wynosi po odbiciu $p' = p\cos(180° - 2\alpha) = -p\cos 2\alpha$ (gdzie p – pęd początkowy), czyli zmiana pędu wynosi $\Delta p = p(1+\cos 2\alpha) = 2p\cos^2\alpha = 2p(1-(h/r)^2)$. Oznaczmy liczbę cząstek padających w ciągu sekundy na jednostkową powierzchnię prostopadłą przez n. Aby obliczyć siłę ze wzoru $F = \mathrm{d}p/\mathrm{d}t$, należy otrzymane wyrażenie Δp pomnożyć przez n oraz przez powierzchnię cienkiego pierścienia zawartego między h a $h+\mathrm{d}h$ (równą $\Delta S = 2\pi h\mathrm{d}h$) i scałkować po h od 0 do r:

$$F = 4\pi pn \int_0^r \left(1-(h/r)^2\right) h\mathrm{d}h = pn\pi r^2.$$

Wielkość ta jest równa sile działającej na pochłaniającą cząstki powierzchnię o polu πr^2 (przypadek b).

257. Oznaczmy objętość lewej części przez V_1, początkową objętość prawej przez V_2, przyrost objętości przez ΔV, temperatury początkowe przez T_1 i T_2, temperatury końcowe przez T_1' i T_2', a odpowiednie liczby moli w poszczególnych częściach przez n_1, n_2, n_1' i n_2'. Ponieważ energia wewnętrzna n moli gazu o temperaturze T jest dana wzorem $U = nC_VT$, a praca przy przesunięciu tłoka – wzorem $W = -p\Delta V$, więc bilans energii ma postać

$$n_1C_VT_1 + n_2C_VT_2 + Q - p\Delta V = n_1'C_VT_1' + n_2'C_VT_2'.$$

Z równania Clapeyrona mamy

$$n_1'T_1' = pV_1/R = n_1T_1,\quad n_2'T_2' = p(V_2+\Delta V)/R = n_2T_2 + p\Delta V/R.$$

W wyniku podstawienia otrzymujemy

$$QR = p\Delta V(R + C_V) = C_pp\Delta V.$$

Równanie to obowiązuje w każdym z przypadków a)-c), zatem ΔV nie zależy od tego, którą część podgrzejemy.
(Bardzo podobne do powyższego było przed trzema laty zadanie 198.)

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 853. Czy istnieje taki ciąg $\{a_n\}$ liczb naturalnych, że dla każdego n liczba $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ jest kwadratem liczby naturalnej?
Rozwiązanie na str. 17

M 854. Czy istnieje taki nieskończony zbiór liczb naturalnych, że żadna skończona suma liczb z tego zbioru nie jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku całkowitym większym niż 1?
Rozwiązanie na str. 17

M 855. Znaleźć 11 kolejnych liczb naturalnych, których suma kwadratów jest kwadratem liczby naturalnej.
Rozwiązanie na str. 11

Przygotował Konrad BANASZEK

F 481. Automatyczny układ do napełniania zbiornika składa się z pływaka, który po podniesieniu się do pewnego poziomu zamyka zawór doprowadzający wodę. Zdarza się, że tuż przed odcięciem dopływu wody cały układ wpada w drgania. Wychyleniu pływaka z położenia równowagi musi więc towarzyszyć powstanie pewnej siły, wymuszającej jego powrót do położenia równowagi. Oszacować częstotliwość drgań przy założeniu, że głównym źródłem tej siły jest siła wyporu działająca na pływak. Przyjąć masę pływaka $m = 0{,}1$ kg i pole jego przekroju poprzecznego $S = 100\ \mathrm{cm}^2$.
Rozwiązanie na str. 16

F 482. Instalacja nagłaśniająca wydaje czasem buczenie, pochodzące z ponownej rejestracji przez mikrofon dźwięków wyemitowanych przez głośnik. Jaka będzie typowa częstotliwość odgłosów, jeśli odległość między tymi urządzeniami wynosi $l = 3$ m?
Rozwiązanie na str. 11