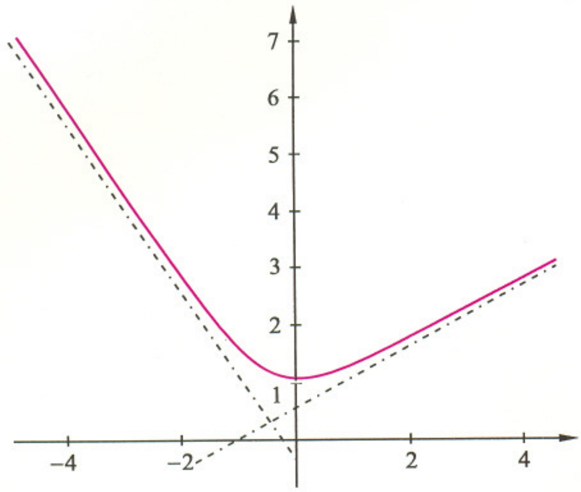
8/98 (8)

Γlimatias $\lim_{n\to\infty}$

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (5″)

Wyjaśnienie oszustwa (5′) – *tym razem poprawne*:

Funkcja f nie ma minimum w punkcie -1, gdyż $f'(-1)=-1\neq 0$! Liczba -1 nie jest rozwiązaniem równania $2x+1=\sqrt{x^2+x+1}$, bo dla $x=-1$ ma ono postać $-1=\sqrt{1}$, ale po obustronnym podniesieniu do kwadratu dostajemy $1=1$. Prawdziwy wykres funkcji naszkicowany jest na rysunku.



JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (7′)

Wyjaśnienie oszustwa (7):

We wzorze na sumę postępu geometrycznego n jest liczbą wyrazów postępu. W sumie $1+3+3^2+3^3+\ldots+3^n$ wyrazów jest $n+1$, więc jest ona równa $\frac{3^{n+1}-1}{2}$, skąd

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+3^2+3^3+\ldots+3^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-1}{2\cdot 3^n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{3^n}}{2}=\frac{3}{2}.$$

JWR

CYFROMANIA (6)

Zastanówmy się, jakie końcówki mogą mieć liczby postaci 2^{2^n}. Wiemy już z wcześniejszych artykułów, że dowolna liczba $0<r_k<10^k$, podzielna przez 2^k i niepodzielna przez 5, może być k-cyfrową końcówką liczby 2^m. Chcąc uzyskać taką końcówkę, wystarczy zażądać, aby m dawało odpowiednią resztę s_k przy dzieleniu przez $4\cdot 5^{k-1}$. Jeśli nakładamy na m dodatkowe ograniczenie, że jest ono równe 2^n, to tym samym nakładamy pewne ograniczenie na resztę s_k z dzielenia m przez $4\cdot 5^{k-1}$.

Otóż, s_k musi dzielić się przez 4 (o ile $n\geq 2$) oraz nie może dzielić się przez 5. Ponieważ dowolna reszta z dzielenia przez 5^{k-1}, niepodzielna przez 5, jest realizowana jako reszta z dzielenia pewnej potęgi dwójki przez 5^{k-1}, więc s_k nie podlega żadnym innym ograniczeniom.

Dopuszczalnej dla wyrażenia postaci 2^{2^n} reszcie $r_k \pmod{10^k}$ odpowiada więc $s_k \pmod{4\cdot 5^{k-1}}$, które to s_k podlega wyżej opisanym ograniczeniom. Chcemy poznać po samym r_k, czy odpowiadające mu s_k jest dobre.

Liczba s_k ma się dzielić przez 4. Jak to wyrazić w języku r_k? Chwila zastanowienia pokazuje, że r_k musi się kończyć cyfrą 6.

Rozpatrując dwucyfrowe końcówki potęg dwójki zakończone cyfrą 6, łatwo zobaczymy, co oznacza warunek $5\nmid s_2$:

s_2	r_2
$4 \pmod{20}$	$16 \pmod{100}$
$8 \pmod{20}$	$56 \pmod{100}$
$12 \pmod{20}$	$96 \pmod{100}$
$16 \pmod{20}$	$36 \pmod{100}$
$0 \pmod{20}$	$76 \pmod{100}$

Widać, że z powyższej listy trzeba wykreślić końcówkę 76. Warunek $20\mid s_k$ jest równoważny temu, że $r_k\equiv 76 \pmod{100}$. Otrzymujemy więc:

WNIOSEK: Liczba $1<r<10^k$, $k\geq 2$ pojawia się jako k-cyfrowa końcówka w liczbach postaci 2^{2^n} $(n\geq 2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy r dzieli się przez 2^k, ma ostatnią cyfrę 6, a przedostatnia cyfra (która musi być nieparzysta) jest różna od 7.

Zauważmy, że przy tym liczba możliwych końcówek k-cyfrowych wynosi $4\cdot 5^{k-2}$.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl

Rozwiązanie zadania M 853.
Tak, istnieje. Na przykład ciąg skonstruowany indukcyjnie w następujący sposób: $a_1=3$; jeśli mamy już odpowiednie $a_1,\ldots,a_n$, przy czym $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=(2k+1)^2$, to kładziemy $a_{n+1}=2k^2+2k$ i mamy wtedy $a_1^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2=(2k+1)^2+(2k^2+2k)^2=(2k^2+2k+1)^2$.

Rozwiązanie zadania M 854.
Tak, istnieje. Np. zbiór $\{2,\ 2^23,\ 2^23^25,\ 2^23^25^27,\ldots,\ 2^23^2\cdot\ldots\cdot p_{n-1}^2p_n,\ldots\}$, gdzie przez p_n oznaczyliśmy n-tą liczbę pierwszą. Dowolna skończona suma liczb z tego zbioru będzie podzielna przez p_k, ale nie przez p_k^2, gdzie k jest numerem najmniejszego ze składników w tej sumie.