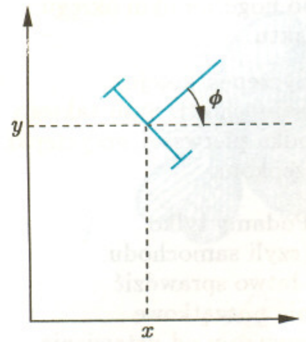
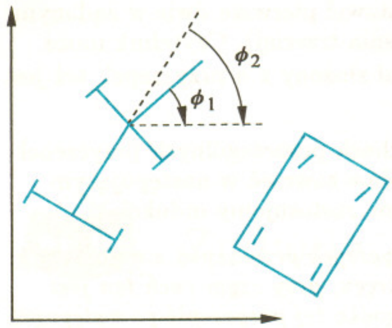
Samochód z n przyczepkami

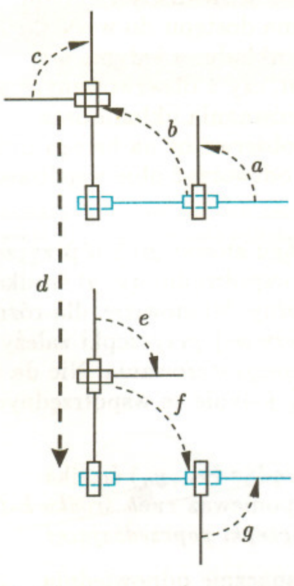
Bronisław JAKUBCZYK



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3 Położenie początkowe i końcowe zaznaczono kolorem.

Przed dwoma miesiącami pisaliśmy o żeglowaniu i o Matematycznej Teorii Sterowania. Teraz opiszemy model matematyczny i niektóre problemy sterowania dla samochodu z przyczepkami. Zaczniemy od modelu jednoosiowej przyczepki, który stanowi sam w sobie interesujący układ. Ten sam model opisuje ruch monocykla (tzn. jednokołowego roweru) lub toczącej się monety. We wszystkich tych przykładach przyjmujemy upraszczające założenie, że monocykl czy przyczepka nie przechyla się, oraz ignorujemy położenie kątowe koła (lub kół).

Wybieramy układ współrzędnych na płaszczyźnie, po której porusza się przyczepka lub monocykl. Położenie pojazdu opisują dwie współrzędne kartezjańskie x i y środka osi oraz kąt ϕ między osią podłużną przyczepki a osią x układu współrzędnych (rys. 1).

Sterowaniami niech będą: prędkość u, zmiany kierunku (tzn. kąta ϕ) osi podłużnej przyczepki oraz prędkość v środka przyczepki w kierunku osi podłużnej. Przyjmiemy też, że koła przyczepki (koło monocykla) toczą się bez poślizgu, tzn. prędkość jest skierowana wzdłuż osi podłużnej. Model matematyczny naszego układu ma postać

$$\frac{d\phi}{dt} = u, \qquad \frac{dx}{dt} = v\cos\phi, \qquad \frac{dy}{dt} = v\sin\phi.$$

Otrzymany układ jest sterowalny, tzn. możliwe jest przejście z dowolnego położenia początkowego (x_p, y_p, ϕ_p) do dowolnego położenia końcowego (x_k, y_k, ϕ_k). Możemy to uzyskać przez następujące ruchy.

1. Poprzez obrót (a więc przyjmując sterowania $u = \pm 1$, $v = 0$) skierujemy przyczepkę osią podłużną dokładnie w stronę punktu (x_k, y_k).

2. Przez przesunięcie (jazdę po prostej, ze sterowaniem $u = 0$, $v = 1$) osiągniemy położenie końcowe środka przyczepki (x_k, y_k).

3. Stosując kolejny obrót, osiągniemy zadane położenie końcowe kąta ϕ_k.

Przejdźmy teraz do bardziej interesującego przykładu *samochodu*. Możemy go opisać jako połączenie dwóch jednoosiowych przyczepek,tak jak na rysunku 2 (prawdziwy samochód ma przednią oś nieruchomą, ale można użyć niżej podanego modelu matematycznego, wprowadzając tylko ograniczenia na możliwości zmiany kąta kół przednich). Dla opisania położeń otrzymanego w ten sposób układu wystarczy użyć następujących współrzędnych: ϕ_1 – kąt (z osią x) osi podłużnej pierwszej przyczepki, ϕ_2 – kąt (z osią x) osi podłużnej drugiej przyczepki, (x, y) – współrzędne kartezjańskie środka pierwszej przyczepki. Sterowania u oraz v oznaczają odpowiednio prędkość kątową pierwszej przyczepki oraz prędkość przesuwania się. Zakładając jednostkową odległość osi otrzymujemy układ równań

$$\frac{d\phi_1}{dt} = u, \quad \frac{d\phi_2}{dt} = v\sin(\phi_1 - \phi_2), \quad \frac{dx}{dt} = v\cos\phi_1, \quad \frac{dy}{dt} = v\sin\phi_1.$$

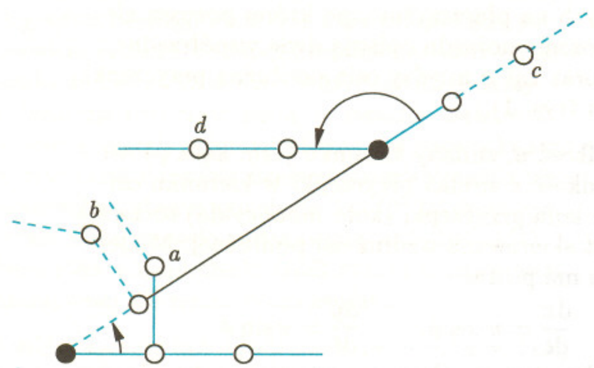
Wykażemy, że również ten układ jest sterowalny (nasz dowód zakłada możliwość pełnego zakresu zmian kątów ϕ_0 i ϕ_1). W naszym rozumowaniu użyjemy następującego, raczej oczywistego faktu.

Pierwsza przyczepka, po ewentualnym wstępnym obrocie, może wykonywać ruch po dowolnym uogólnionym okręgu na płaszczyźnie (ruch po uogólnionym okręgu oznacza również obrót, który traktujemy jako ruch po okręgu o zerowym promieniu, oraz ruch po prostej, którą traktujemy jako okrąg o nieskończonym promieniu).

Wobec tego, możemy tak poruszać (sterować) pierwszą przyczepką, by druga przyczepka wykonała kolejno ruchy opisane powyżej, które przeniosą ją z położenia wyjściowego w położenie końcowe (rys. 3). Ponieważ położenie drugiej przyczepki wyznacza położenie środka pierwszej, pozostaje wykonać odpowiedni obrót pierwszej przyczepki, by cały układ przybrał żądane położenie końcowe.

Zachodzi też mocniejszy fakt, a mianowicie *druga przyczepka może również wykonywać ruch po dowolnym uogólnionym okręgu na płaszczyźnie, przy czym ruch ten jest bezpośrednio możliwy z wyjściowego położenia jej środka po odpowiednim wstępnym ruchu pierwszej przyczepki, zachowującym położenie środka drugiej.* Wynika to stąd, że podczas ruchu drugiej przyczepki po uogólnionym okręgu pierwsza wykonuje również ruch po uogólnionym okręgu, a więc ruch dopuszczalny wobec stwierdzonego wyżej faktu.

Rozważmy wreszcie abstrakcyjny układ złożony z n przyczepek kolejno połączonych (pierwsze dwie z nich możemy uważać za samochód). Stan takiego układu będzie wyznaczony przez współrzędne (x, y) środka pierwszej przyczepki oraz kąty $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ odpowiadające kolejnym przyczepkom.



Rys. 4

Taki układ jest również sterowalny. Podamy tylko rozumowanie dla trzech przyczepek (czyli samochodu z przyczepką), które Czytelnik może łatwo sprawdzić poprzez rysunki. Mając dane położenie początkowe układu, oraz żądane końcowe, rozpoczynamy od ustawienia pierwszych dwu przyczepek jak na rysunku 4 (jest to możliwe wobec stwierdzonego wyżej faktu dla dwu przyczepek). Następnie, poruszając odpowiednio pierwsze dwie przyczepki, dokonujemy obrotu trzeciej przyczepki. W kolejnym kroku przesuwamy jej środek do żądanego położenia końcowego. W przedostatnim kroku znowu dokonujemy obrotu tej przyczepki, by w ostatnim ustawić pierwsze dwie w żądanym położeniu (bez zmiany położenia trzeciej). Czytelnik może spróbować udowodnić (przez indukcję), że układ złożony z n przyczepek też jest sterowalny.

Nasze poprzednie stwierdzenia o możliwych ruchach poszczególnych przyczepek w pociągu złożonym z n przyczepek można ogólnie zawrzeć w następującym fakcie (jego dowód jest nietrudny, jeśli umiejętnie zastosujemy indukcję).

Poprzez odpowiednie ruchy poprzedzających przyczepek przyczepka z numerem k może poruszać się po dowolnym uogólnionym okręgu, przy czym ruch ten jest możliwy bezpośrednio z wyjściowego położenia środka tej przyczepki po wstępnych ruchach przyczepek poprzedzających nie poruszających tego środka.

Wynika z tego następująca własność: pociąg złożony jedynie z przyczepek z numerami $k, k+1, \ldots, n$ ma te same możliwości ruchu, co pociąg mający dodatkowo pierwszych $k-1$ przyczepek, jeśli tylko te pierwsze $k-1$ przyczepek „zgaduje intencje" tych następnych (tzn. dostosowuje swój ruch odpowiednio do ruchu następnych).

W teorii sterowania ważny jest także **problem obserwowalności** układu. Występuje on wtedy, gdy umowny obserwator nie ma dostępu do wszystkich współrzędnych stanu (tzn. uogólnionego położenia) układu, a jedynie do części z nich lub ich funkcji. Problem polega na tym, czy z obserwowanych współrzędnych da się odtworzyć pozostałe (znając równania układu oraz sterowania). Na przykład, w problemie z żaglówką obserwator na brzegu może mierzyć jedynie położenie kątowe łódki, a chciałby odtworzyć obie współrzędne kartezjańskie jej położenia.

Zajmiemy się problemem obserwowalności dla pociągu złożonego z n przyczepek. Załóżmy, że współrzędne dostępne w obserwacji to współrzędne (x, y) środka pierwszej przyczepki. Taki układ nie jest obserwowalny. Mianowicie, dla różnych położeń początkowych dalszych przyczepek ruch pierwszej przyczepki zależy tylko od jej położenia początkowego oraz zastosowanego sterowania. Nie da się więc wyznaczyć położenia początkowego przyczepek jedynie ze współrzędnych środka pierwszej przyczepki.

Jeśli jednak przyjmiemy, że obserwowane są współrzędne (x_n, y_n) środka ostatniej przyczepki, układ staje się obserwowalny, ponieważ *ruch środka k-tej przyczepki wyznacza jednoznacznie ruch środka przyczepki poprzedzającej.*

Istotnie, ruch środka k-tej przyczepki określa jednoznacznie odpowiednią prędkość (choć możemy mieć kłopoty z jej praktycznym wyliczeniem).

Kierunek tej prędkości, wobec braku bocznego poślizgu, jest kierunkiem osi podłużnej tej przyczepki, a zatem znamy położenie k-tej przyczepki. Znajomość długości dyszla (odległości środków przyczepek) wyznacza teraz położenie środka przyczepki poprzedzającej.

Rozpoczynając od funkcji czasu $x_n(t)$ i $y_n(t)$ określających położenie środka ostatniej przyczepki, wiemy, że określają one jednoznacznie położenie środka (w czasie) $(n-1)$-szej przyczepki, te z kolei poprzedniej i tak dalej. Dochodzimy do tego, że położenia wszystkich przyczepek, łącznie z samochodem, są określone przez współrzędne ostatniej przyczepki, jako funkcje czasu.

Żeby doprecyzować matematycznie nasze rozumowanie, wystarczy założyć, że współrzędne (x_k, y_k) środka k-tej przyczepki są gładkimi (tzn. różniczkowalnymi dowolnie wiele razy) funkcjami czasu i środek ten jest w ruchu. Musimy to założyć dlatego, że przy przechodzeniu do przyczepki poprzedzającej używaliśmy kierunku prędkości, a więc różniczkowaliśmy współrzędne odpowiedniej przyczepki. Dodatkowo kierunek tej prędkości był jednoznacznie określony jedynie przy prędkości niezerowej.

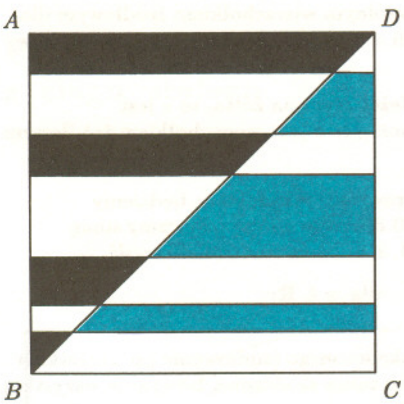
Jako ostatnią uwagę podajemy następującą własność naszego układu, która jest związana z poprzednio opisanymi własnościami.

Współrzędne środka $(x_n(t), y_n(t))$ ostatniej przyczepki mogą kreślić dowolną krzywą gładką na płaszczyźnie. Dodatkowo, jeśli określona przez nie prędkość nie znika, to współrzędne te, jako funkcje czasu, określają jednoznacznie położenie całego pociągu jako funkcję czasu.

Wyjaśnienie tej pozornie paradoksalnej własności leży w tym, że do wyznaczenia położenia środka poprzedzającej przyczepki używamy położenia i prędkości następnej, do położenia jeszcze wcześniejszej używamy położenia, prędkości i przyśpieszenia, itd.

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI



M 850. Pionowy bok AB kwadratu $ABCD$ został podzielony na n odcinków w ten sposób, że suma długości odcinków z parzystymi numerami jest równa sumie długości odcinków z nieparzystymi numerami. Przez punkty podziału poprowadzono proste poziome, uzyskując n prostokątów, z których każdy jest rozcinany przez przekątną BD na dwie części: lewą i prawą (rys.). Wykazać, że suma pól lewych części prostokątów o numerach nieparzystych jest równa sumie pól prawych części prostokątów o numerach parzystych.
Rozwiązanie na str. 5

M 851. Punkty M i N leżą na bokach, odpowiednio, BC i CD kwadratu $ABCD$. Oznaczmy przez P, Q, R przecięcia odcinków, odpowiednio, AM i BN, BN i MD, MD i AN. Wykazać, że

$$S_{APQR} = S_{BMP} + S_{MCNQ} + S_{RND}.$$

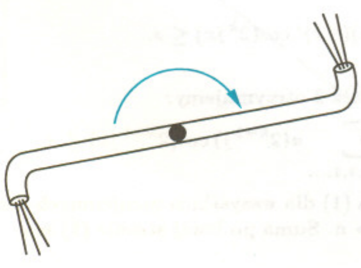
Rozwiązanie na str. 5

M 852. Żadne dwa boki wypukłego n-kąta T nie są równoległe. Wykazać, że dla każdego punktu O wewnątrz T istnieje co najwyżej n prostych przechodzących przez O, z których każda rozcina T na dwie części o równych polach.
Rozwiązanie na str. 9

W zadaniach i ich rozwiązaniach przyjęto oznaczenie $S_{A_1\ldots A_n}$ dla pola wielokąta $A_1 \ldots A_n$.

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 479. Proste urządzenie do podlewania ogrodu składa się z rurki o długości $l = 40$ cm i średnicy $d = 5$ mm z zagiętymi prostopadle końcami. Rurka może się obracać w płaszczyźnie poziomej wokół swojej osi symetrii, przy czym moment sił tarcia jest wprost proporcjonalny do prędkości kątowej rurki, ze współczynnikiem proporcjonalności $\alpha = 5$ kg m^3/s. Do rurki doprowadzamy wodę w ilości $w = 0{,}2$ dm^3/s. Z jaką prędkością kątową będzie obracać się urządzenie?
Rozwiązanie na str. 5



F 480. Oszacować zasięg zraszania ogrodu przez urządzenie opisane w poprzednim zadaniu, jeśli znajduje się ono na wysokości $h = 1$ m nad powierzchnią ziemi.
Rozwiązanie na str. 5