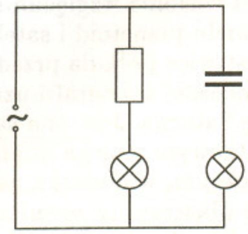
Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1998

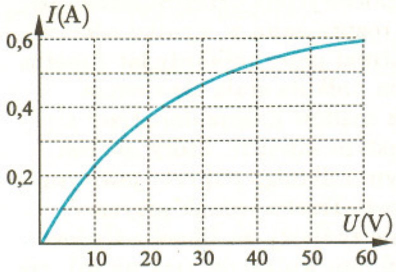
Przypominamy treść zadań:

254. Samochodzik-zabawka ma napęd zarówno na przednią, jak i na tylną oś, lecz wskutek błędu konstrukcyjnego na każdych 10 obrotów przedniej osi przypada 11 obrotów tylnej osi (promień kółek jest jednakowy). Jeśli masa samochodzika wynosi 300 g, obie osie są jednakowo obciążone, a współczynnik tarcia kółek o podłoże jest równy 0,6, to jaka jest minimalna moc silnika pozwalająca na jazdę z prędkością 15 cm/s po torze poziomym?



Rys. 1

255. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 częstotliwość zasilania wynosi $f = 50$ Hz, oporność opornika $R = 100\ \Omega$, pojemność kondensatora $C = 20\ \mu$F, a żarówki są jednakowe. Charakterystyka prądowo-napięciowa żarówek jest przedstawiona na rysunku 2. Okazało się, że przy pewnej wartości skutecznej napięcia źródła U żarówki paliły się jednakowo silnie, a przy wyższym i niższym napięciu – niejednakowo. Obliczyć wartość U. Która żarówka paliła się jaśniej przy wyższym, a która przy niższym napięciu?



Rys. 2

254. Jeśli ślizgać się będą tylne kółka, to przesunięciu samochodzika o 15 cm będzie towarzyszyło przesunięcie obrzeża tylnych kółek względem samochodzika o $15 \cdot 11/10$ cm $= 16{,}5$ cm, czyli nastąpi poślizg o 1,5 cm. Praca przeciw sile tarcia wynosi w takim przypadku $150\ \text{g} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}5\ \text{cm} = 0{,}013$ J. Jeśli natomiast ślizgać się będą przednie kółka, to przesunięcie ich obrzeża wyniesie $15 \cdot 10/11$ cm $= 13{,}64$ cm, nastąpi poślizg o 1,36 cm, a odpowiednia praca będzie równa 0,012 J. W zasadzie przy jednakowym obciążeniu osi poślizg mógłby nastąpić na dowolnej osi (lub jednocześnie na obu osiach, z pośrednią wartością pracy), lecz ponieważ dowolnie mała dodatkowa siła oporu spowoduje poślizg tylnych kółek, więc prawidłowa wartość mocy wynosi raczej 0,013 W.

255. Gdy żarówki palą się jednakowo, ich opór (iloraz U/I) ma jednakową wartość, którą oznaczymy przez R'. Impedancja gałęzi z kondensatorem jest dana wzorem $Z_1 = \sqrt{R'^2 + Z_C^2}$, gdzie $Z_C = 1/C\omega$, natomiast impedancja gałęzi z opornikiem jest równa $Z_2 = R' + R$. Przyrównując Z_1 do Z_2 wyznaczamy R':

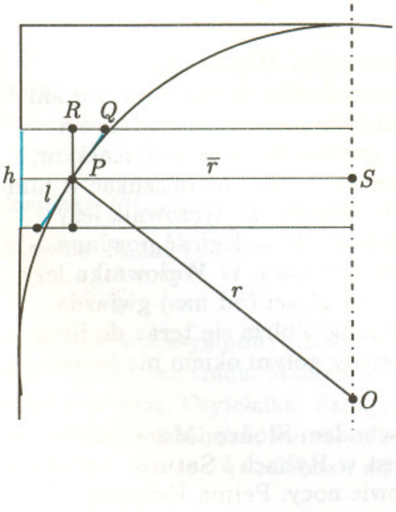
$$R' = \frac{Z_C^2 - R^2}{2R} = 76{,}7\ \Omega.$$

W punkcie przecięcia odpowiedniej prostej z wykresem charakterystyki prądowo-napięciowej odczytujemy natężenie prądu $I \approx 0{,}53$ A, a dalej obliczamy $U = I(R' + R) \approx 94$ V. Przy niższym napięciu źródła opór żarówek jest mniejszy, a wtedy decydującą rolę odgrywa fakt, że $Z_C > R$ – zatem $Z_1 > Z_2$ i jaśniej pali się żarówka w gałęzi z opornikiem. Przy wyższym napięciu źródła (i większym oporze żarówek) sytuacja jest przeciwna, gdyż wtedy $Z_2 > Z_1$.

Pożytek z ciągu stałego

Okazuje się, że twierdzenie o tym, iż ciąg stały jest zbieżny, ma zupełnie ciekawe zastosowania. Oto dwa przykłady. Pierwszy pochodzi z czasów wojen punickich, a drugi z czasów Wiosny Ludów.

Dla obliczenia pola powierzchni kuli umieszczamy ją wewnątrz opisanego na niej walca, a następnie obie powierzchnie tniemy na paski równoległe do podstawy walca. Powierzchnię każdego paska kuli przybliżamy powierzchnią boczną stożka ściętego stycznego do niej w połowie swojej wysokości. Okazuje się, że pole paska walca i pole powierzchni bocznej tego stożka jest w każdej części podziału takie samo. Oto rachunek: z oczywistego podobieństwa trójkątów OPS i QPR (rysunek przedstawia osiowy przekrój rozpatrywanych brył) mamy



$$\frac{OP}{PS} = \frac{QP}{PR}, \quad \text{czyli} \quad OP \cdot PR = PS \cdot QP, \quad \text{zatem} \quad r \cdot \frac{h}{2} = \bar{r} \cdot \frac{l}{2},$$

skąd wynika, że $2\pi r h = 2\pi \bar{r} l$. Dla całej powierzchni kuli otrzymujemy przybliżenie równe sumie pasków powierzchni bocznej walca, czyli $4\pi r^2$. Przybliżając powierzchnię kuli coraz dokładniej, czyli biorąc coraz węższe paski, za każdym razem otrzymujemy ten sam wynik – tyle też w granicy jest równe pole powierzchni kuli.

Oto sposób na udowodnienie Podstawowego Twierdzenia Analizy, czyli że jeśli f' – pochodna funkcji f – jest całkowalna w sensie Riemanna, to zachodzi $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$. Zgodnie z twierdzeniem o wartości średniej mamy

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= (f(b) - f(c_k)) + (f(c_k) - f(c_{k-1})) + \ldots + (f(c_1) - f(a)) = \\ &= f'(\xi_k)(b - c_k) + f'(\xi_{k-1})(c_k - c_{k-1}) + \ldots + f'(\xi_0)(c_1 - a) \end{aligned}$$

(gdzie ξ_i zostały wybrane z odpowiednich przedziałów).
Prawa strona tych równości dla tzw. normalnego ciągu podziałów (czyli ciągu podziałów, w których długość najdłuższego z przedziałów dąży do zera) jest zbieżna z definicji do rozważanej całki, a ciąg przybliżeń znów jest ciągiem stałym.

M.K. i J.M.