Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1998

Przypominamy treść zadań:

357. Rozważamy graf skierowany, w którym każde dwa różne wierzchołki a, b są połączone dokładnie jedną z dwóch zorientowanych krawędzi: $a \to b$ lub $b \to a$. Ponadto każda krawędź jest pomalowana albo na żółto albo na czerwono. Udowodnić, że istnieje wierzchołek, z którego można do każdego innego wierzchołka dotrzeć wzdłuż krawędzi jednego koloru, w kierunku zgodnym z ich orientacją.

358. Liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$ spełniają dla każdej liczby rzeczywistej x nierówność

$$a_1 \sin^2 x + a_2 \sin^2 2x + a_3 \sin^2 3x + \ldots + a_n \sin^2 nx \geq 0.$$

Czy stąd wynika, że $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geq 0$?

357. Gdy liczba wierzchołków grafu wynosi 1 lub 2, nie ma czego dowodzić. Ustalmy liczbę naturalną $n \geq 3$; załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla każdego grafu o liczbie wierzchołków mniejszej od n i weźmy pod uwagę graf n-wierzchołkowy, o jakim mowa w zadaniu. Zbiór jego wierzchołków oznaczmy przez X.

Wierzchołek, z którego do każdego innego wierzchołka prowadzi droga jednokolorowa, będziemy nazywali wierzchołkiem źródłowym. Mamy dowieść, że taki wierzchołek istnieje.

Weźmy dowolny wierzchołek $a \in X$. Niech b będzie dowolnym wierzchołkiem źródłowym dla zbioru $X \setminus \{a\}$ (istnieje w myśl założenia indukcyjnego). Jeżeli krawędź łącząca wierzchołki a i b ma kierunek $b \to a$, to b jest wierzchołkiem źródłowym dla X i teza jest udowodniona. Załóżmy więc, że $a \to b$ jest krawędzią grafu; możemy przyjąć, że ma ona kolor żółty.

Oznaczmy przez Z zbiór wszystkich wierzchołków w zbiorze $X \setminus \{a\}$, do których można z wierzchołka b dotrzeć drogą żółtą. Niech c będzie dowolnym wierzchołkiem źródłowym dla zbioru $(X \setminus Z \setminus \{b\}) \cup \{a\}$ (założenie indukcyjne). Jeśli $c = a$, to jest to wierzchołek źródłowy dla całego zbioru X. Przyjmijmy zatem, że $c \neq a$.

Z wierzchołka c prowadzi do a droga jednokolorowa. Jeżeli jest ona żółta, to c jest wierzchołkiem źródłowym dla X. Jeżeli jest ona czerwona, to b jest wierzchołkiem źródłowym dla X. To kończy dowód indukcyjny.

358. Odpowiedź: tak. Dowód: aby uniknąć „wielopiętrowych" wskaźników, będziemy pisać $a(m)$ zamiast a_m. Przyjmijmy ponadto $a(m) = 0$ dla $m > n$ oraz oznaczmy sumę $a(1) + \ldots + a(n)$ przez s. Udowodnimy, że dla $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ zachodzi nierówność

$$\sum_{j \geq 1} a(2^k j) \cos(2^k jx) \leq s \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}; \tag{1}$$

użyty symbol oznacza – formalnie – sumę szeregu nieskończonego (sumowanie po wszystkich dodatnich liczbach całkowitych j), ale faktycznie jest to suma skończona, bo prawie wszystkie składniki są zerami.

Dowód przez indukcję. Dla $k = 0$ mamy sumę

$$\sum_j a(j) \cos(jx) = \sum_j a(j)\big(1 - 2\sin^2(jx/2)\big) = s - 2\sum_j a(j) \sin^2(jx/2),$$

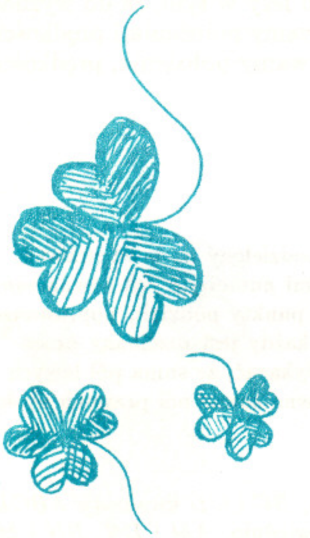
a wartość otrzymanego wyrażenia nie przekracza s, zgodnie z warunkiem zadania. Ustalmy liczbę całkowitą $k \geq 0$ i przyjmijmy, że warunek (1) jest dla niej spełniony. Zastępując x przez $x + 2^{-k}\pi$ dostajemy nierówność

$$\sum_j a(2^k j) \cos(2^k jx + j\pi) = \sum_j a(2^k j)(-1)^j \cos(2^k jx) \leq s. \tag{2}$$

Dodajemy związki (1) i (2) stronami i po podzieleniu przez 2 otrzymujemy:

$$\sum_{j=2,4,6,8,\ldots} a(2^k j) \cos(2^k jx) \leq s, \qquad \text{czyli} \qquad \sum_{j=1,2,3,4,\ldots} a(2^{k+1} j) \cos(2^{k+1} jx) \leq s$$

– czyli tezę indukcyjną. To dowodzi prawdziwości zdania (1) dla wszystkich nieujemnych liczb całkowitych k. Bierzemy teraz liczbę k tak dużą, by $2^k > n$. Suma po lewej stronie (1) ma wówczas wartość 0, co oznacza, że $s \geq 0$.



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 349 (WT=1,38) i 350 (WT=2,33)
z numeru 11/1997

Maciej Mostowski	– Warszawa	42,81
Piotr Kumor	– Olsztyn	35,39
Witold Bednarek	– Łódź	32,66
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	32,41
Zbigniew Skalik	– Pyskowice	32,15

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 250 (WT=2,70) i 251 (WT=3,00)
z numeru 1/1998

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	36,44
Tomasz Wietecha	– Tarnów	15,39
Marek Wójcicki	– Szczecin	13,88
Aleksander Surma	– Myszków	11,08

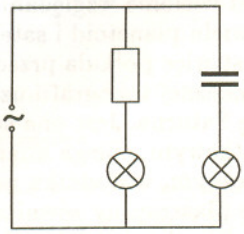
Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1998

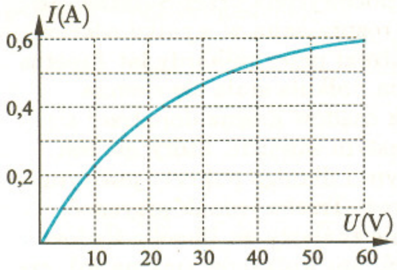
Przypominamy treść zadań:

254. Samochodzik-zabawka ma napęd zarówno na przednią, jak i na tylną oś, lecz wskutek błędu konstrukcyjnego na każdych 10 obrotów przedniej osi przypada 11 obrotów tylnej osi (promień kółek jest jednakowy). Jeśli masa samochodzika wynosi 300 g, obie osie są jednakowo obciążone, a współczynnik tarcia kółek o podłoże jest równy 0,6, to jaka jest minimalna moc silnika pozwalająca na jazdę z prędkością 15 cm/s po torze poziomym?

255. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 częstotliwość zasilania wynosi $f = 50$ Hz, oporność opornika $R = 100\ \Omega$, pojemność kondensatora $C = 20\ \mu$F, a żarówki są jednakowe. Charakterystyka prądowo-napięciowa żarówek jest przedstawiona na rysunku 2. Okazało się, że przy pewnej wartości skutecznej napięcia źródła U żarówki paliły się jednakowo silnie, a przy wyższym i niższym napięciu – niejednakowo. Obliczyć wartość U. Która żarówka paliła się jaśniej przy wyższym, a która przy niższym napięciu?



Rys. 1



Rys. 2

254. Jeśli ślizgać się będą tylne kółka, to przesunięciu samochodzika o 15 cm będzie towarzyszyło przesunięcie obrzeża tylnych kółek względem samochodzika o $15 \cdot 11/10$ cm $= 16{,}5$ cm, czyli nastąpi poślizg o 1,5 cm. Praca przeciw sile tarcia wynosi w takim przypadku 150 g $\cdot$ 9,8 m/s$^2 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}5$ cm $= 0{,}013$ J. Jeśli natomiast ślizgać się będą przednie kółka, to przesunięcie ich obrzeża wyniesie $15 \cdot 10/11$ cm $= 13{,}64$ cm, nastąpi poślizg o 1,36 cm, a odpowiednia praca będzie równa 0,012 J. W zasadzie przy jednakowym obciążeniu osi poślizg mógłby nastąpić na dowolnej osi (lub jednocześnie na obu osiach, z pośrednią wartością pracy), lecz ponieważ dowolnie mała dodatkowa siła oporu spowoduje poślizg tylnych kółek, więc prawidłowa wartość mocy wynosi raczej 0,013 W.

255. Gdy żarówki palą się jednakowo, ich opór (iloraz U/I) ma jednakową wartość, którą oznaczymy przez R'. Impedancja gałęzi z kondensatorem jest dana wzorem $Z_1 = \sqrt{R'^2 + Z_C^2}$, gdzie $Z_C = 1/C\omega$, natomiast impedancja gałęzi z opornikiem jest równa $Z_2 = R' + R$. Przyrównując Z_1 do Z_2 wyznaczamy R':

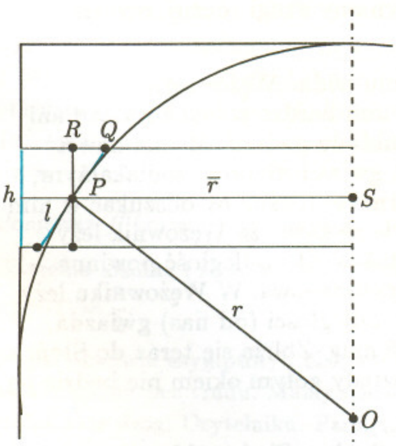
$$R' = \frac{Z_C^2 - R^2}{2R} = 76{,}7\ \Omega.$$

W punkcie przecięcia odpowiedniej prostej z wykresem charakterystyki prądowo-napięciowej odczytujemy natężenie prądu $I \approx 0{,}53$ A, a dalej obliczamy $U = I(R' + R) \approx 94$ V. Przy niższym napięciu źródła opór żarówek jest mniejszy, a wtedy decydującą rolę odgrywa fakt, że $Z_C > R$ – zatem $Z_1 > Z_2$ i jaśniej pali się żarówka w gałęzi z opornikiem. Przy wyższym napięciu źródła (i większym oporze żarówek) sytuacja jest przeciwna, gdyż wtedy $Z_2 > Z_1$.

Pożytek z ciągu stałego

Okazuje się, że twierdzenie o tym, iż ciąg stały jest zbieżny, ma zupełnie ciekawe zastosowania. Oto dwa przykłady. Pierwszy pochodzi z czasów wojen punickich, a drugi z czasów Wiosny Ludów.

Dla obliczenia pola powierzchni kuli umieszczamy ją wewnątrz opisanego na niej walca, a następnie obie powierzchnie tniemy na paski równoległe do podstawy walca. Powierzchnię każdego paska kuli przybliżamy powierzchnią boczną stożka ściętego stycznego do niej w połowie swojej wysokości. Okazuje się, że pole paska walca i pole powierzchni bocznej tego stożka jest w każdej części podziału takie samo. Oto rachunek: z oczywistego podobieństwa trójkątów OPS i QPR (rysunek przedstawia osiowy przekrój rozpatrywanych brył) mamy



$$\frac{OP}{PS} = \frac{QP}{PR}, \quad \text{czyli} \quad OP \cdot PR = PS \cdot QP, \quad \text{zatem} \quad r \cdot \frac{h}{2} = \bar{r} \cdot \frac{l}{2},$$

skąd wynika, że $2\pi r h = 2\pi \bar{r} l$. Dla całej powierzchni kuli otrzymujemy przybliżenie równe sumie pasków powierzchni bocznej walca, czyli $4\pi r^2$. Przybliżając powierzchnię kuli coraz dokładniej, czyli biorąc coraz węższe paski, za każdym razem otrzymujemy ten sam wynik – tyle też w granicy jest równe pole powierzchni kuli.

Oto sposób na udowodnienie Podstawowego Twierdzenia Analizy, czyli że jeśli f' – pochodna funkcji f – jest całkowalna w sensie Riemanna, to zachodzi $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$. Zgodnie z twierdzeniem o wartości średniej mamy

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= (f(b) - f(c_k)) + (f(c_k) - f(c_{k-1})) + \ldots + (f(c_1) - f(a)) = \\ &= f'(\xi_k)(b - c_k) + f'(\xi_{k-1})(c_k - c_{k-1}) + \ldots + f'(\xi_0)(c_1 - a) \end{aligned}$$

(gdzie ξ_i zostały wybrane z odpowiednich przedziałów).
Prawa strona tych równości dla tzw. normalnego ciągu podziałów (czyli ciągu podziałów, w których długość najdłuższego z przedziałów dąży do zera) jest zbieżna z definicji do rozważanej całki, a ciąg przybliżeń znów jest ciągiem stałym.

M.K. i J.M.