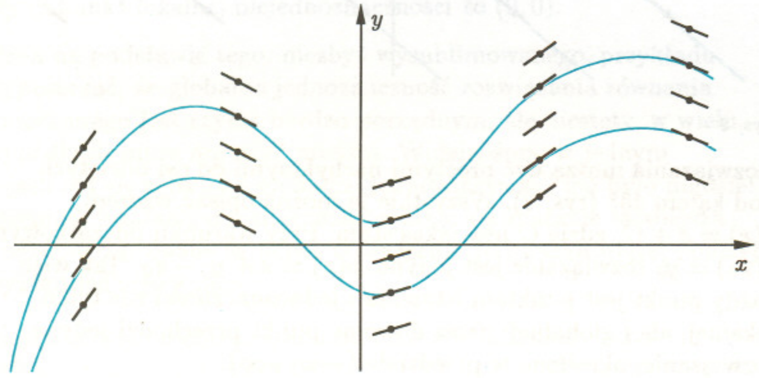
Jest takie równanie

Krzysztof CIESIELSKI

Oryginalne, niestandardowe przykłady dodają matematyce uroku. Czasem chciałoby się zawołać: „to niemożliwe, coś takiego nie może istnieć!”. Dziwnych obiektów matematycznych jest bardzo wiele. To opowiadanie będzie o jednym z nich.

Rozważmy płaszczyznę z wprowadzonym kartezjańskim układem współrzędnych i załóżmy, że w każdym jej punkcie umieszczona została jakaś liczba. Szukamy funkcji (o argumentach i wartościach rzeczywistych) wyznaczonej w pewien sposób przez zadane liczby. Chodzi o to, że jeśli (x_0, y_0) należy do wykresu funkcji, to pochodna funkcji w x_0 ma być równa właśnie liczbie „zaczepionej” w (x_0, y_0). Gdy przypomnimy sobie geometryczną interpretację pochodnej, możemy powiedzieć, że *mamy w każdym punkcie dany kąt nachylenia stycznej do wykresu nieznanej funkcji, a funkcję, która do tych stycznych „pasuje”, chcemy znaleźć.*



Rys. 1

Zapiszmy to formalnie. Dane jest odwzorowanie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Szukamy funkcji $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ewentualnie dziedziną może być przedział zawarty w $\mathbb{R}$), takiej, że dla każdego argumentu x funkcji y spełniony jest warunek $y'(x) = f(x, y(x))$.

Zapisane powyżej równanie to **równanie różniczkowe zwyczajne**. Poszukując funkcji, której wykres leży na płaszczyźnie „zgodnie” z zadanymi pochodnymi, dobrze jest narzucić jeszcze jeden warunek: wykres szukanej funkcji y zmiennej x powinien przechodzić przez pewien wyznaczony punkt płaszczyzny. Warunek ten, zwany **warunkiem początkowym**, zapisujemy: $y(x_0) = y_0$, gdzie (x_0, y_0) to właśnie dany punkt na płaszczyźnie. Klasyczne w teorii równań różniczkowych zadanie znalezienia funkcji, spełniającej takie dwa warunki, nazywane jest *problemem Cauchy'ego*.

Nasuwają się dwa naturalne pytania. Po pierwsze, czy rozwiązanie – to znaczy odpowiednia funkcja, określona w jakimś przedziale, zawierającym x_0 – istnieje? Po drugie, jeśli istnieje, to czy jest w tym przedziale jedyna? Łatwo się domyślić, że zależy to przede wszystkim od funkcji f.

Twierdzenie (uproszczona wersja twierdzenia Peano o istnieniu). *Jeżeli funkcja* $f : [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \to \mathbb{R}$ *jest ciągła, to dla pewnego* $\alpha > 0$ *problem*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w przedziale $[x_0, x_0 + \alpha]$.

Dobrego nigdy za wiele

Piotr CHRZĄSTOWSKI

Wpadł do mnie Paweł, mój bardzo bliski przyjaciel. Postawił dwie identyczne puszki na stole.

– Mam fajną zabawę – powiedział. – To gra, w której możesz tylko zyskać. Chodzi o to, żebyś zyskał jak najwięcej.

Zasady są takie: za chwilę pójdę do sąsiedniego pokoju i zacznę rzucać monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Zanotuję, ile reszek zdążyło wypaść przed pierwszym pojawieniem się orła, i jeśli będzie ich n, to do jednej puszki (nie będziesz wiedział, do której) włożę 3^n złotych, a do drugiej 3^{n+1} zł. Następnie przyniosę ci obie puszki. Ty będziesz mógł dowolną z nich otworzyć i sprawdzić, ile zawiera pieniędzy. Następnie albo bierzesz to, co widzisz, albo decydujesz się na wzięcie pieniędzy z drugiej puszki. To są zasady. Teraz chodzi o to, żebyś opracował najlepszą strategię: kiedy warto zatrzymać to, co widzisz, a kiedy decydować się na tę drugą puszkę?

Zacząłem przyglądać się założeniom. Możliwe układy par gotówki w puszkach to $(1, 3), (3, 9), (9, 27), \ldots$. Oczywiście, układy te są rozłożone według następującej reguły: para $(1, 3)$ będzie się pojawiać z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ (bo w połowie przypadków orzeł wypadnie od razu), para $(3, 9)$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ (bo w jednej czwartej przypadków zostanie wyrzucona najpierw jedna reszka, a tuż po niej orzeł), para $(9, 27)$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{8}$, itd. Zawsze będzie tak, że prawdopodobieństwo wystąpienia dowolnej pary jest dwa razy większe, niż tej, która bezpośrednio po niej następuje. Zwykły rozkład geometryczny.

Zrobiliśmy jedną próbę. W puszce, którą otworzyłem, zobaczyłem 3 złote. Aha, to znaczy, że w drugiej puszce jest albo jedna złotówka, albo jest ich tam 9. Oczywiście to, że jest ich tam 9, jest dokładnie 2 razy mniej prawdopodobne, niż to, że jest tam pojedynczy złocisz: w końcu układ $(1, 3)$ jest dokładnie 2 razy bardziej prawdopodobny niż układ $(3, 9)$. Ponieważ inne układy już nie wchodzą w grę, więc z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ mamy w drugiej puszce jedną złotówkę, a z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ dziewięć złotych. Jeżeli zdecydujemy się na wzięcie zawartości tej drugiej puszki, to średnio dostaniemy $\frac{2}{3}1 + \frac{1}{3}9$ zł, ewidentnie więcej niż, co prawda, gwarantowane, ale tylko 3 zł, które byśmy mieli pozostając przy pierwszej puszce.

Co by było, gdybym otworzywszy pierwszą puszkę, zobaczył w niej inne kwoty? Z jedynką nie ma problemu: bez zastanowienia biorę 3 zł z drugiej puszki. A dla większych wartości? Załóżmy, że widzę 3^i zł. Oznacza to, że w drugiej puszce z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ znajdę 3^{i-1} zł, a z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ zobaczę 3^{i+1} zł. Jeżeli zatem zdecyduję się na drugą puszkę, to średnio dostanę $\frac{2}{3}3^{i-1} + \frac{1}{3}3^{i+1}$ zł. Ponieważ sam drugi składnik tej sumy jest równy 3^i, więc oczekiwana wartość zysku przy wzięciu kwoty z drugiej puszki jest ostro większa, niż oczekiwana (a przy okazji pewna) kwota z puszki, którą otworzyłem.

No to wszystko jest jasne! Strategia okazała się bardzo prosta: wystarczy po otworzeniu zawsze decydować się na tę drugą puszkę, a na pewno średnio wyjdziemy lepiej, niż pozostając przy kwocie z tej otwartej.

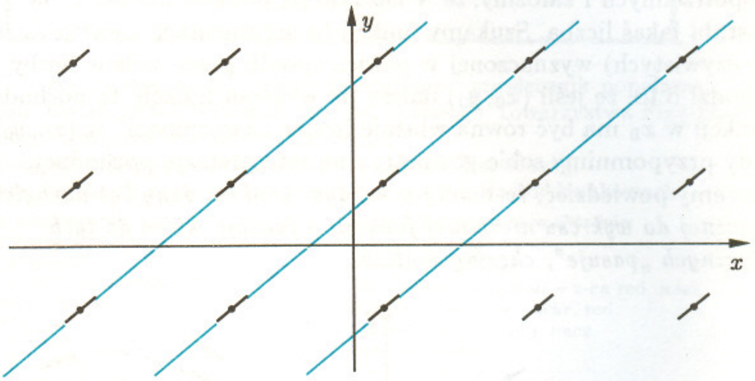
Zaraz, zaraz... To po co w ogóle otwierać i sprawdzać, co jest w tej pierwszej puszce? Skoro i tak zawsze dostaniemy średnio więcej, niż to, co w niej zobaczymy, to nie ma sensu się męczyć z otwieraniem, tylko od razu wziąć tę drugą puszkę. Uproszczona strategia jest więc taka. Wybierz dowolną puszkę, a potem otwórz ją, albo i nie – jak chcesz – bylebyś tylko pamiętał, żeby ostatecznie wziąć tę drugą puszkę! Na pewno wyjdziesz na tym średnio lepiej, niż gdybyś pozostał przy pierwszym wyborze.

Coś tu jednak nie gra. No bo skoro nie musimy puszki otwierać, to co by było, gdybyśmy jako pierwszą wybrali tę drugą, niby lepszą? Wybranie pozostałej puszki musiałoby nam przynieść średnio stratę. Ponadto przecież gdy stoimy przed dwiema zamkniętymi puszkami, to nie sposób stwierdzić, która jest lepsza. Czyżby jednak otwarcie puszki było konieczne do zastosowania prawidłowej strategii?

Wygląda na to, że tak. No więc dobrze. Mamy przed sobą dwie nierozróżnialne puszki. Bierzemy jedną do ręki, na razie wszystko jedno którą, i powoli uchylamy wieczko. Jeszcze nic nie widzimy, jeszcze wszystko jedno, na którą puszkę się zdecydujemy, ale po chwili dostrzegamy parę monet na dnie: wygląda na to, że jest więcej niż 3, ale nie aż 27, czyli zapewne 9...

Jeśli funkcja f jest odpowiednio „porządna" (przy czym nie musimy wymagać wiele, por. twierdzenie wydrukowane kolorem), to problem Cauchy'ego ma rozwiązanie. Trochę bardziej wysublimowane założenia należy podać w celu zagwarantowania jedyności rozwiązania, ale i tu nie jest źle, jeżeli wystarczy nam jednoznaczność lokalna. **Lokalna jednoznaczność** oznacza, że jeśli startujemy od punktu (x_0, y_0), to w pewnym przedziale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ rozwiązanie jest jedyne.

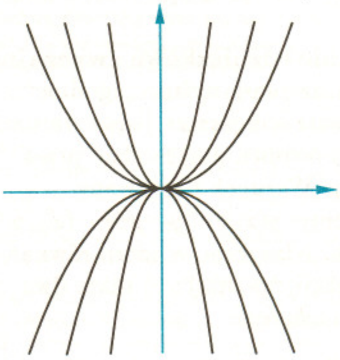
Najwyższy czas na parę prostych przykładów. Rozważmy równanie $y'(x) = 1$; w każdym punkcie pochodna szukanej funkcji jest stała.



Rys. 2

Rozwiązania muszą być prostymi nachylonymi do osi odciętych pod kątem 45° (rys. 2). Wszystkie je można opisać wzorem: $y(x) = x + C$, gdzie C jest jakąś stałą. Przy warunku początkowym $y(x_0) = y_0$ rozwiązanie jest jedyne: $y(x) = x + y_0 - x_0$. Tak więc każdy punkt jest punktem istnienia i jednoznaczności nie tylko lokalnej, ale i globalnej; przez dowolny punkt przechodzi jedyne rozwiązanie, określone w przedziale $(-\infty, +\infty)$.

Narysujmy teraz na płaszczyźnie rodzinę krzywych: wszystkie parabole o wspólnym wierzchołku w punkcie $(0,0)$ oraz prostą, pokrywającą się z osią OX (rys. 3). Równanie określamy w ten sposób, że w każdym punkcie styczna do szukanej funkcji jest styczną do przechodzącej przez ten punkt paraboli (lub osi odciętych). Jedynym miejscem, gdzie mogłoby to sprawić problem, jest $(0,0)$, bo tylko przez ten punkt przechodzi więcej niż jedna krzywa – ale nie ma z tym kłopotu, bo dla każdej z nich styczna w tym punkcie jest taka sama, pochodna wynosi 0. Równanie to określone jest przez funkcję:



Rys. 3

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

ale nie jest to w tej chwili istotne.

Spróbujmy zobaczyć, jak w tym przykładzie wygląda istnienie i jednoznaczność rozwiązań. Oczywiście, rozwiązaniami są funkcje $y(x) = Cx^2$ dla dowolnego C (dla $C = 0$ wychodzi funkcja stała). Oznacza to, że przez każdy punkt nie należący do osi OY przechodzi jakieś rozwiązanie; przez punkt $(0,0)$ przechodzi ich nieskończenie wiele (a zatem jest on ewidentnie punktem niejednoznaczności), przez pozostałe punkty osi rzędnych rozwiązania nie przechodzą.

A jak jest dla $x_0 \neq 0$? Na pierwszy rzut oka wydawać by się mogło, że tu rozwiązanie będzie jedyne – któraś z paraboli, ewentualnie prosta. A jednak nie! Rozważmy, na przykład, warunek początkowy $y(-1) = 1$ – szukamy rozwiązania przechodzącego przez $(-1, 1)$. Oczywiście, jest nim funkcja $y = x^2$. Ale nie tylko! Rozwiązaniem jest też funkcja

$$y(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \le 0, \\ 0 & \text{dla } x \ge 0 \end{cases}$$

i w tej chwili nietrudno zauważyć, że jeśli w punkcie $(0, 0)$ dokleimy do „lewej części” paraboli $y = x^2$ „prawą część” którejkolwiek paraboli, wszystko będzie w porządku. Ogólnie, rozwiązanie ma postać

$$y(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \le 0, \\ Cx^2 & \text{dla } x \ge 0. \end{cases}$$

Punkt $(-1, 1)$ nie jest zatem punktem globalnej jednoznaczności – ale jest punktem jednoznaczności **lokalnej**; w przedziale $(-\infty, 0)$ mamy jedyne rozwiązanie $y(x) = x^2$. Łatwo zauważyć, że analogicznie jest dla każdego punktu (x_0, y_0), o ile tylko $x_0 \neq 0$; wszędzie tam rozwiązanie istnieje i jest w pewnym otoczeniu jedyne. Jedyny punkt lokalnej niejednoznaczności to $(0, 0)$.

Można na podstawie tego, niezbyt wysublimowanego, przykładu przypuszczać, że globalna jednoznaczność rozwiązania równania różniczkowego jest czymś bardzo porządnym, ale niestety, w wielu przypadkach może nie mieć miejsca. Widzieliśmy: w jednym miejscu coś się zepsuło i globalnej jednoznaczności nie było nigdzie! Natomiast lokalna jednoznaczność wydaje się znacznie łatwiejsza do osiągnięcia. Znane są liczne twierdzenia to gwarantujące; poniżej przykład jednego z nich.

Twierdzenie (uproszczona wersja twierdzenia Picarda–Lindelöfa). *Jeżeli $P = [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ i funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz istnieje takie $L > 0$, że $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$ dla dowolnych $(x, y_1), (x, y_2) \in P$, to dla pewnego $\alpha > 0$ problem*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $[x_0, x_0 + \alpha]$.

Nasuwa się pytanie: jak dalece „nieporządna” (czyli dopuszczająca dużo punktów lokalnej niejednoznaczności) sytuacja może zajść? Otóż istnieją przykłady wyjątkowo perfidne. Mianowicie, można pokazać równanie różniczkowe, dla którego **żaden** punkt na płaszczyźnie nie jest punktem lokalnej jednoznaczności (i to w obu kierunkach, zarówno w prawo, jak i w lewo). Inaczej: istnieje taka ciągła funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, że równanie różniczkowe $y'(x) = f(x, y(x))$ ma dla każdego warunku początkowego $y(x_0) = y_0$ rozwiązanie (i to określone na przedziale $(-\infty, +\infty)$), przy czym jakąkolwiek liczbę $\delta > 0$ weźmiemy, to zarówno w przedziale $(x_0 - \delta, x_0]$, jak i w przedziale $[x_0, x_0 + \delta)$ znajdziemy więcej niż jedno rozwiązanie równania, spełniające zadany warunek początkowy. Dziwne? A jednak...

Pierwszy taki przykład podał w roku 1925 Michaił Aleksiejewicz Ławrientiew. Ten, którego idea konstrukcji pokazana zostanie poniżej, przedstawił w roku 1963 Philip Hartman.

Najpierw narysujmy na płaszczyźnie rodzinę sinusoid tak, by każda „wyższa” była w punktach swoich minimów styczna do bezpośrednio „niższej” w punktach jej maksimów. Precyzyjnie: rysujemy wykresy funkcji $u_k(x) = \cos \pi x + 4k$ oraz $v_k(x) = -\cos \pi x + 4k + 2$ dla

STOP! Od tego momentu już opłaca się wziąć drugą puszkę! Czyli konieczne jest *uświadomienie* sobie, ile mamy złotych w pierwszej puszce, aby naprawdę zaczęło się opłacać wybranie tej drugiej. Coś jest nie tak! A jeżeli ja mam słaby wzrok, źle dostrzegłem i okaże się, że jednak kwota jest inna? Nic nie szkodzi! Strategia jest ogólna. A jeżeli zacznę oszukiwać i zamknę oczy, albo będę się tak nieostro patrzył, żeby nic nie zobaczyć? Gdzie pojawia się ten moment, w którym już na pewno opłaca się zdecydować na tę drugą puszkę? Przecież od tego, czy *ja* patrzę źle czy dobrze, nie może zależeć przeskoczenie z kompletnej równości szans do sytuacji, w której faktycznie mam strategię lepszą, niż pozostanie przy pierwszej puszce.

Spojrzałem na Pawła. Czy on wariata ze mnie struga? A on, faktycznie, się śmieje: Widzę, że masz zagwozdkę? Zastanów się więc, ile średnio wygrasz przy dwóch strategiach: tej niby najlepszej „Biorę zawsze to, co w drugiej puszce” i tej niby najgorszej „Biorę zawsze to, co widzę”. Bo cała reszta strategii jest gdzieś pośrodku. Zacząłem obliczenia. Przy pierwszej strategii średnio wygram

$$\frac{1}{2}3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}9 + \frac{2}{3}1\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}27 + \frac{2}{3}3\right) + \ldots = \\ = \frac{1}{2}3 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}}\left(3^i + 2 \cdot 3^{i-2}\right) = \infty,$$

a przy drugiej

$$\frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}3 + \frac{1}{8}9 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^{i-1}}{2^i} = \infty.$$

A widzisz! I tu, i tu wygrywasz nieskończenie dużo. Nie możesz tylko pogodzić się z myślą, że może to być dokładnie tyle samo. A to dlatego, że nie jesteś sobie w stanie wyobrazić, co to znaczy, że średnio wygrasz nieskończenie dużo, a ponadto jesteś zachłanny. Nie rozumiesz jeszcze?

To oczywiste. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że ten pierwszy szereg ma każdy wyraz większy od odpowiadającego mu wyrazu drugiego szeregu. Ale wystarczy przesunąć pierwszy szereg o jedną pozycję w następujący sposób: Pierwsze trzy wyrazy pierwszego szeregu porównujemy z pierwszymi czterema drugiego i okazuje się, że te drugie są łącznie o $\frac{13}{48}$ od nich większe. Dalej, piąty wyraz drugiego szeregu $\left(\frac{1}{32}81\right)$ jest większy od czwartego wyrazu pierwszego szeregu $\left(\frac{1}{16}(27 + 2 \cdot 3)\right)$, szósty wyraz drugiego szeregu od piątego z pierwszego, i tak dalej. Każdy i-ty wyraz pierwszego szeregu jest mniejszy niż $(i + 1)$-szy wyraz drugiego szeregu. Przy takim zestawieniu drugi szereg wydaje się być większy od pierwszego. Oczywiście absurd, a wynika stąd, że nie wolno nam porównywać w ten sposób wartości nieskończonych.

Błąd twój polegał na tym, że poznawszy lokalne strategie (każda poprawna!) starałeś się wymyśleć strategię globalną. Zakładałeś, że jeśli pojedyncze przypadki ustawione parami obok siebie wskazują wyższość pierwszej strategii, to istnieje uogólnienie na wszystkie przypadki naraz. A tak wcale być nie musi – jak zobaczyliśmy, inne zestawienie przypadków daje wprost przeciwny wniosek: ta druga strategia jawi się jako lepsza.

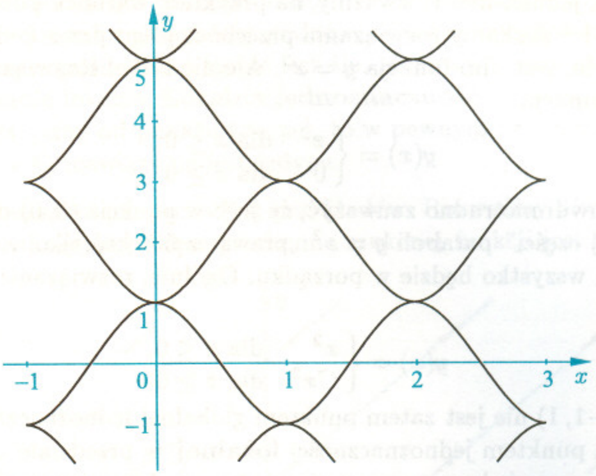
Takie wychodzą kłopoty, gdy zaczynamy bawić się z nieskończonymi wartościami oczekiwanymi. A co one oznaczają tak naprawdę? Intuicyjnie, pojęcie nieskończonej wartości oczekiwanej jest nieoczekiwane: przecież zawsze wygrywamy skończoną wartość, więc jak się można spodziewać średnio nieskończonej wygranej? Otóż nie można się, oczywiście, takiej wygranej spodziewać i w ogóle przyjmujemy, że jeśli odpowiednia suma, określająca wartość oczekiwaną, okaże się nieskończona, to po prostu wartość oczekiwana nie istnieje. Niemniej jednak, można podejść do zagadnienia inaczej i zinterpretować ten fenomen następująco. Wyobraźmy sobie, że ktoś proponuje nam naprawdę taką grę, jak opisana powyżej, tylko że na prawdziwe pieniądze, a ponadto żąda od nas pewnej kwoty, którą musimy uiścić za każdą rundę tej gry. Za jaką kwotę opłaci się nam grać?

Gdyby taka wartość oczekiwana była skończona, to opłacałoby się postawić wszystkie wartości od niej mniejsze, nie opłacałoby się stawiać stawek większych, a stawka równa wartości oczekiwanej nie dałaby zysku żadnej ze stron. W naszym przypadku, gdy wartość oczekiwana jest nieskończona, opłaca się oczywiście grać za każdą stawkę. Rzecz jasna, przy założeniu nieograniczonej wypłacalności partnera.

Pewien ksiądz, zresztą matematyk z wykształcenia, powiedział, że to bardzo interesujący problem. Ludzie często mają żal do Boga, że skoro są „lepsi" od innych, to w wieczności powinni więcej otrzymać. Spodziewają się, co prawda, nieskończenie wielkiej zapłaty za dobrze spędzone życie, ale chcieliby, żeby ci „gorsi" mieli jakoś gorzej! To znaczy, żeby tamtych nieskończenie wielka zapłata za nie tak dobre życie, którą otrzymają w wieczności, była „gorszej jakości".

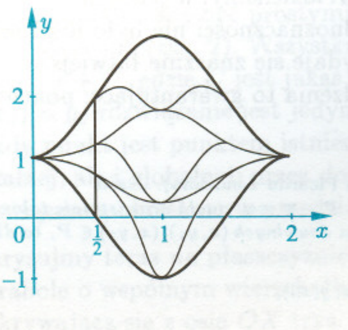
Morał: Gdy masz w perspektywie dostać nieskończenie wiele – nie kombinuj!

wszystkich k całkowitych (rys. 4). Powstaje w ten sposób na płaszczyźnie rodzina krzywych i sieć „oczek" między nimi.



Rys. 4

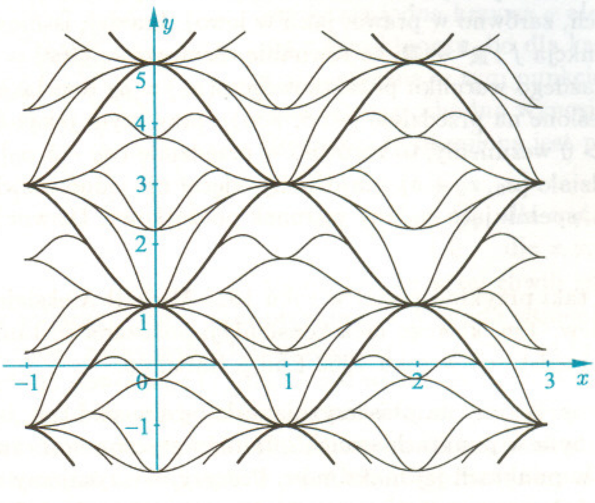
Teraz będziemy rysować kolejne krzywe tak, aby wszystkie stykające się wykresy miały w punktach wspólnych takie same styczne oraz by „oczka" były coraz mniejsze, zagęszczały się. Dokładniej omówimy jedynie drugi krok. Wszystkie powstałe w pierwszym etapie „oczka" są przystające. Wystarczy więc pokazać, jak poprowadzimy nowe linie w jednym z nich; jest to pokazane na rysunku 5. Zauważmy: w tym „oczku" sinusoidy stykały się w punktach o odciętych 0, 1 i 2 (a na płaszczyźnie w punktach o odciętych całkowitych).



Rys. 5

Skonstruowane teraz linie (wraz z tymi z poprzedniego kroku) stykają się w punktach o odciętych $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$. Ogólnie – punkty styczności mają odcięte $\frac{k}{2}$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Rzecz jasna, narysowane krzywe opisane są konkretnym wzorem, który jednak tu sobie darujemy.

Co dalej? Konstrukcję przeprowadza się rekurencyjnie; mając utworzone w kilku krokach „pseudo-sinusoidy", dorabia się



Rys. 6