Zadanie o ruinie gracza

Na stronie 6 tego numeru *Delty* można przeczytać o związku równania przewodnictwa cieplnego z losowym błądzeniem cząstki Browna. Jest to temat bardzo blisko związany z klasycznym zadaniem o ruinie gracza, o którym, gwoli przestrogi dla nieroztropnych, warto przy tej okazji parę słów powiedzieć.

Klasyczna ruletka ma 37 pól: 18 czerwonych, 18 czarnych i jedno zielone. Jeśli postawimy na czarne, a wypadnie czerwone lub zielone, to tracimy stawkę; jeśli wypadnie czarne, to dostajemy podwojoną stawkę.

Problem sformułowany jest zazwyczaj następująco: gracz ma początkowo kapitał k zł i zamierza grać w ruletkę, stawiając kolejno po 1 zł na czerwone lub czarne, aż do momentu, gdy jego kapitał osiągnie N zł, albo do chwili, gdy będzie doszczętnie zrujnowany.

Jak widać, po każdej grze kapitał gracza zmienia się losowo o jeden: wzrasta z prawdopodobieństwem $p = \frac{18}{37}$, spada z prawdopodobieństwem $q = 1 - p = \frac{19}{37}$. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że gracz rozpoczynający grę z kapitałem k zdoła powiększyć go do N, zanim zbankrutuje, oznaczymy przez $p_k(N)$.

Po pierwszej grze gracz nadal chce uciułać N złotych, ale zmienia się jego kapitał początkowy: w przypadku sukcesu, czyli z prawdopodobieństwem p, wzrasta do $k+1$ złotych, a w przypadku porażki – z prawdopodobieństwem q – maleje do $k-1$ złotych. Posługując się wzorem na prawdopodobieństwo całkowite, możemy więc napisać równanie

Proszę porównać to równanie z równaniem (2) w artykule Karola Pesza (str. 6).

$$p_k(N) = p \cdot p_{k+1}(N) + q \cdot p_{k-1}(N). \tag{1}$$

Zauważmy też, że z oczywistych powodów $p_N(N) = 1$ oraz $p_0(N) = 0$.

Gdyby $p = q = 1/2$, to równanie (1) implikowałoby, że ciąg $\left(p_k(N)\right)_{k=0,1,\ldots}$ jest arytmetyczny – każdy wyraz byłby w nim średnią arytmetyczną dwóch wyrazów sąsiednich. Spróbujmy uogólnić to spostrzeżenie: przepiszmy (1) w takiej postaci, by wyrazić przyrost $p_{k+1}(N) - p_k(N)$. Otrzymamy równość

$$p_{k+1}(N) - p_k(N) = \frac{q}{p}\left(p_k(N) - p_{k-1}(N)\right).$$

Ciąg przyrostów jest więc geometryczny i ma iloraz równy q/p, a zatem $p_{k+1}(N) - p_k(N) = (q/p)^k \left(p_1(N) - p_0(N)\right)$. Dalej już jest łatwo; zapisujemy $p_N(N)$ (czyli jedynkę) w postaci sumy kolejnych przyrostów i wykorzystujemy wzór na sumę N wyrazów ciągu geometrycznego:

$$\begin{aligned} 1 \;=\; p_N(N) &= p_0(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left(p_{k+1}(N) - p_k(N)\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k \left(p_1(N) - p_0(N)\right) = \frac{(q/p)^N - 1}{q/p - 1} \cdot p_1(N). \end{aligned}$$

Stąd $p_1(N) = \dfrac{(q/p) - 1}{(q/p)^N - 1}$; cały zabieg powtarzamy, by dostać końcowy wynik:

$$p_k(N) = p_0(N) + \sum_{\ell=0}^{k-1} \left(p_{\ell+1}(N) - p_\ell(N)\right) = \sum_{\ell=0}^{k-1} p_1(N) \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^\ell = \frac{(q/p)^k - 1}{(q/p)^N - 1}.$$

Zatem, dla $q > p$ i dużych wartości początkowego kapitału k oraz zamierzonego zysku $N - k$ mamy w przybliżeniu $p_k(N) \simeq (q/p)^{k-N}$. Prawdopodobieństwo uciułania przez gracza N zł, maleje więc wykładniczo do zera wraz ze wzrostem różnicy $N - k$.

Gdy $k = 100$, to dla $N = 500$ jest

$$p_k(N) = 4{,}03 \cdot 10^{-10},$$

a dla $N = 5000$ mamy

$$p_k(N) = 2{,}4 \cdot 10^{-45}.$$

Gdyby ruletka była grą sprawiedliwą, tzn. dla $p = q = 1/2$, mielibyśmy w pierwszym przypadku $p_k(N) = 1/5$, a w drugim $p_k(N) = 1/50$.

Rozumując podobnie, można wykazać, że $1 - p_k(N)$ to prawdopodobieństwo ruiny gracza. Inaczej mówiąc: z prawdopodobieństwem 1 gracz po skończenie wielu grach wyjdzie z kasyna – w znakomitej większości przypadków – doszczętnie zrujnowany. Dzieje się tak za sprawą jednego, niepozornego, zielonego pola. Między innymi z tego powodu łatwiej jest spotkać pogrążonego w długach nałogowego gracza niż załamanego właściciela kasyna.

Paweł STRZELECKI