Równanie Fokkera–Plancka, czyli pytanie o naturę czasu

Karol PESZ

Zadziwiająco wiele jest podobieństw między mechaniką kwantową a termodynamiką. Z jednej strony, stwierdzenie to może wydać się mało odkrywcze, wręcz puste. Przecież w obu dziedzinach mamy do rozgryzienia podobny problem: jak opisać zachowanie układów o wielkiej – w granicy nieskończonej, jak mówimy – liczbie stopni swobody. Z drugiej strony, przynajmniej na obecnym etapie rozwoju nauki, pokrewieństwo mechaniki kwantowej i termodynamiki istotnie jest zadziwiające.

O analogiach w zachowaniu układów termodynamicznych i kwantowych napisano całe tomy. My weźmy pod uwagę dwa modelowe obiekty: pojedynczą swobodną cząstkę kwantową oraz cząstkę Browna w cieczy. Mamy tu do czynienia z różnicą skal wielkości znacznie przekraczającą przysłowiową różnicę między „mrówką a słoniem". A jednak dynamika tych obiektów wykazuje podobieństwo, z którego konsekwencji, być może, ciągle nie zdajemy sobie w pełni sprawy.

Ktoś zapyta: jakże to? Przecież pojedyncza cząstka kwantowa to „fala materii", to „duszek" ulotnie wypełniający fragment przestrzeni, to obiekt bardziej zadziwiający niż UFO, istniejący jednocześnie „tu" i „tam" tak długo, dopóki go nie usiłujemy „zobaczyć". Jeśli się już uda w sprytnie pomyślanym eksperymencie tego rozmytego duszka złowić, to łapiemy go całego „tu". „Tam" jakby go wcale nie było lub też plotki o skończonej prędkości światła są nieprawdziwe.

Natomiast pojedyncza cząstka Browna powoli wędrująca przez niezmierzone (nawet w skali jednej kropli) obszary cieczy to maleńki, co prawda, acz solidny obiekt. Można go śledzić, można z dowolną dokładnością wyrysować jego trajektorię. Zawsze wreszcie można powiedzieć, że cząstka jest w tym i tylko w tym jednym miejscu, w którym ją widać. Taka drobina nie cierpi na „roz-n-jenie jaźni" (przy $n = 2$ – rozdwojenie).

Przy obecnym rozumieniu pojęć: *cząstka, przestrzeń, czas*, cząstka kwantowa i cząstka Browna są więc zupełnie różnymi obiektami.

Ufając (podobnie jak Newton) w to, że równania różniczkowe rzeczywiście opisują świat, spójrzmy na losy obu niespokojnych wędrowców poprzez odpowiednie równania ruchu. Podobnie jak w przytłaczającej liczbie rozważań o charakterze podstawowym ograniczymy się do jednego wymiaru. Póki nie interesujemy się efektami specjalnymi powodowanymi przez wymiar przestrzeni (jak np. spin), modele jednowymiarowe funkcjonują zadziwiająco dobrze.

Cząstka kwantowa o masie m opisana jest równaniem Schrödingera

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}, \tag{1}$$

gdzie $\Psi(x,t)$ jest *funkcją falową*, interpretowaną jako amplituda gęstości prawdopodobieństwa, tzn. prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w chwili t w przedziale (a,b) to całka $\int_a^b |\Psi(x,t)|^2\,dx$. Zatem na samym początku rezygnujemy z możliwości wskazania miejsca, w którym w danej chwili *na pewno* znajduje się cząstka. Wprowadzona *ad hoc* amplituda gęstości prawdopodobieństwa jest pojęciem wątpliwym. Jednak cząstka punktowa jest również tworem idealnym, o czym nazbyt często zapominamy, spotykając skale małości, na których nasze doświadczenie życiowe i indukowana nim wyobraźnia zawodzą. Czasami fizycy unikają tego problemu wprowadzając pojęcie pola, ale to jest tylko przesunięcie trudności.

Cząstka Browna porusza się pod wpływem pola siłowego, ustawicznie zmieniającego wielkość i kierunek. Przypadkowo uderzające w brownowskiego gościa cząsteczki cieczy chaotycznie modyfikują jego położenie i pęd (spróbujcie dodać podobne założenie swobodnej cząstce kwantowej – kto Wam w to uwierzy?). Dlatego nie możemy deterministycznie określić jej położenia i pędu nawet w niezbyt odległej przyszłości. Możemy za to podać prawdopodobieństwo znalezienia jej w pewnej chwili i w pewnym miejscu. Tym razem jednak równanie, określające takie prawdopodobieństwo, możemy wyprowadzić w stosunkowo prosty sposób.

Rozpatrzmy cząstkę, która startuje z pewnego miejsca na prostej i wykonuje co pewien odstęp czasu Δt krok długości Δx w prawo z prawdopodobieństwem p, a taki sam krok w lewo z prawdopodobieństwem $(1-p)$. (Podobne zdanie znajdzie Czytelnik w większości podręczników termodynamiki statystycznej.) Nie możemy powiedzieć, gdzie znajdzie się błądząca cząstka po N skokach, czyli po czasie $N\Delta t$; nie wiemy nawet, czy będzie na prawo, czy też na lewo od punktu startu. Możemy jednak napisać relację, wiążącą prawdopodobieństwo p z gęstością prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w chwili $(t+\Delta t)$ w punkcie x, jeśli wiadomo, że w chwili t była oddalona od tego punktu o Δx. Oznaczając gęstość prawdopodobieństwa przez $f(x,t)$, stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} &f(x,t+\Delta t) = \\ &= p\cdot f(x-\Delta x,t) + (1-p)\cdot f(x+\Delta x,t)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Znalezienie wzoru na $f(x,t)$ na podstawie tego równania nie wygląda na zadanie łatwe. Przeto wprowadźmy kolejne, często spotykane założenie. Przypuśćmy, że skoki są krótkie i odbywają się szybko (innymi słowy, Δt i Δx są małe). Załóżmy, że funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe i rozłóżmy ją w szereg Taylora. Zatrzymując wyrazy najniższego rzędu oraz przyjmując $p = 0{,}5$ (co oznacza, że cząstka nie ma tendencji, by skakać częściej w jedną stronę, powiedzmy – w prawo), dostaniemy równanie postaci

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{3}$$

gdzie dla ustalonych Δx i Δt wielkość D ma dobrze określoną wartość

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \tag{4}$$

i wymiar współczynnika dyfuzji ($\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$).

Tak więc, jeśli zaniedbamy wszelkie siły zachowawcze, które mogłyby z premedytacją kierować cząstkę w jedną stronę, to gęstość prawdopodobieństwa spełnia równanie przewodnictwa cieplnego. Jest to szczególny przypadek równania Fokkera–Plancka. Pod tą nazwą można w literaturze spotkać najprzeróżniejsze równania. Jeśli, zamiast rozpatrywać przypadek swobodny, założylibyśmy obecność deterministycznej siły F, to otrzymalibyśmy równanie

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}(f \cdot F), \tag{5}$$

które powinno się nazywać równaniem Smoluchowskiego. Najbardziej klasyczne „równanie Fokkera–Plancka” opisuje gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki o prędkości v, w miejscu x i chwili t. Zważywszy jednak, że w bardzo poważnych czasopismach naukowych nazwa *równanie Schrödingera* określa często bardzo różne napisy – nie będziemy drobiazgowi.

Stwierdzenie, że ... *równanie Fokkera–Plancka jest dla termodynamiki tym, czym dla mechaniki kwantowej równanie Schrödingera*, można często spotkać w podręcznikach (zob. np. [1]). Luźna analogia to jednak nie wszystko.

Od równania Fokkera–Plancka (3) do równania Schrödingera (1) można przejść formalnie, zamieniając czas „termodynamiczny” t na czas czysto urojony it, i następnie korzystając z zasady nieoznaczoności:

$$D = \lim \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \lim \Delta x \cdot \Delta v \approx \frac{\hbar}{2m}. \tag{6}$$

Rozwiązania pierwszego równania stają się po podstawieniach $t \mapsto it$ rozwiązaniami drugiego równania. Zmienia się tylko interpretacja.

W swoich *Wykładach* [3] Feynman stwierdził, że *„takie same równania mają takie same rozwiązania”*. Na tym, między innymi, polega piękno fizyki: kilka podstawowych równań opisuje, jeśli nie dokładnie, to przynajmniej z grubsza, niewyobrażalną ilość efektów. Znając dokonania tego fizyka (lub choćby jego *Wykłady*), możemy się domyślać, jak głęboko Feynman zdawał sobie sprawę, że formalne podobieństwo rozwiązań jest – gdy zapomnieć o zbędnej masce różnych parametrów, warunków granicznych i pozornie odległych sytuacji fizycznych – echem podstawowych mechanizmów, którymi rządzi się przyroda.

Równanie Fokkera–Plancka pojawia się wszędzie tam, gdzie w czasowym przebiegu zjawisk nie można ustrzec się szumu. Spotykamy je w najróżniejszych dziedzinach fizyki, chemii, techniki: szum w obwodach elektrycznych; układy chemiczne, w których reakcje i dyfuzja wzajemnie na siebie wpływają; okołoprogowa akcja laserowa; przejścia fazowe – mają ze sobą więcej wspólnego, niż można oczekiwać na pierwszy rzut oka. We wszystkich wspomnianych układach jest obecny ten sam fundamentalny mechanizm: fluktuacje, które towarzyszą przejściu układu z jednego stanu w inny. Mają one uniwersalny charakter, więc i równanie, które je elegancko uwzględnia, jest uniwersalne.

Wróćmy do relacji (6). Napisał ją Michaił Zak z Pasadeny w niezwykle interesującym artykule o pewnym układzie deterministycznych równań, które zaburzone dowolnie małym szumem prowadzą do rozwiązań chaotycznych [2]. Też go pewnie zadziwiła bliskość dwu probabilistycznych obrazów, w których zamiana czasu „rzeczywistego” na „urojony” przeprowadza nas przez furtkę w murze dzielącym termodynamikę od mechaniki kwantowej. Zak podejrzewa, że wyjaśnienia należy szukać w szczególnej teorii względności: czas traci w niej swoją odrębność, a zamiast „trajektorii przestrzennej cząstki” możemy rozpatrywać „ciąg zdarzeń”. W tym samym numerze czasopisma *Chaos, Solitons & Fractals* jego twórca i redaktor, El Nashie z Cambridge, wielki zwolennik zespolonego czasu, jeszcze raz przywołuje Hawkinga, który *pierwszy miał odwagę zasugerować, że urojony czas może być w istocie czasem „rzeczywistym”.*

Dla wielu fizyków te dwa zjawiska są dydaktycznymi ćwiczeniami, są znane, opisane, sklasyfikowane. Odnoszę jednak wrażenie, że w ciągu najbliższych lat pojawi się ktoś, kto dostrzeże w nich coś, co wzburzy nasz obraz świata podobnie, jak poruszyły go rozważania Einsteina nad jednoczesnością. Być może znowu chodzi o czas? Wszak ciągle nie wiemy, co to jest czas.

Literatura

[1] H. Risken, *The Fokker–Planck Equation* (2nd Ed.), Springer 1989.

[2] M. Zak, Dynamical Simulations of Probabilities, *Chaos, Solitons & Fractals* vol. 8, 1997.

[3] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *Feynmana wykłady z fizyki*, PWN, Warszawa 1970.