6/98 (6)
Γ $\lim_{n\to\infty}$ atias

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (4′)

Wyjaśnienie oszustwa (4):

Objętość kuli wpisanej w czworościan jest równa $\frac{4}{3}\pi 10^3 > 4000$, czyli jest większa od objętości czworościanu!

Dane w zadaniu są źle dobrane. Wielościan opisany na sferze o promieniu 10 musi mieć pole powierzchni większe od pola powierzchni tejże sfery, czyli $400\pi > 1200$.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (5)

ZADANIE: Naszkicować wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}x$.

Rozwiązanie: Ważną rzeczą jest znalezienie asymptot ukośnych, gdyż ich naszkicowanie ułatwi poprowadzenie wykresu funkcji.

Asymptota ukośna w $+\infty$ ma równanie $y = ax + b$, gdzie

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}x}{x} = \\ = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

oraz

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) = \\ = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + x} = \\ = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Podobnie w $-\infty$

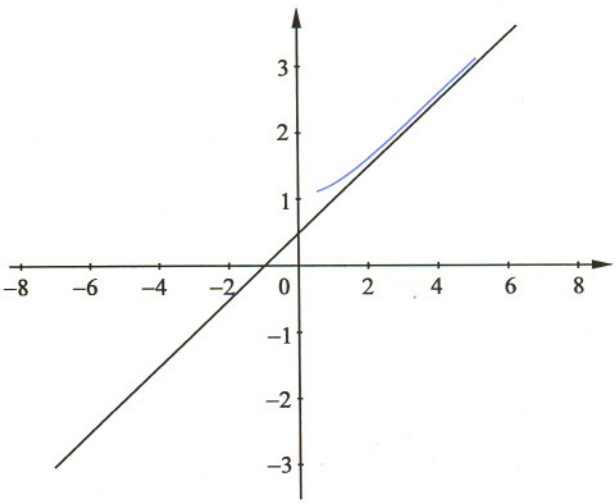
$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}x}{x} = \\ = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

oraz

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) = \\ = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + x} = \\ = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Zatem $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ jest asymptotą ukośną zarówno w $+\infty$, jak i w $-\infty$.

Część wykresu naszkicowaliśmy poniżej. Mamy nadzieję, że bez trudu dorysujesz resztę, drogi Czytelniku. Pamiętaj, że wykres musi zbliżać się do asymptoty w miarę posuwania się do $-\infty$.



Aha, i nie bazgraj niczego pod osią OX, bo f jest funkcją dodatnią.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (6)

Rozpatrzmy ciąg 1, 8, 45, 220, 1001,… Łatwo sprawdzić, że n-ty wyraz tego ciągu można zdefiniować wzorem

$(*)$ $\quad a_n = 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^n - 3 - 3^2 - 3^3 - \ldots - 3^n$.

Ciąg ten można również odnaleźć w trójkącie Pascala jako jedną z jego kolumn i wtedy

$$(**) \qquad a_n = \binom{2n+4}{n-1}.$$

Ze wzoru $(*)$ widzimy, że a_{19} jest liczbą nieparzystą. Tymczasem ze wzoru $(**)$ mamy $a_{19} = \binom{42}{18} = \frac{42!}{18!24!}$. Czynnik 2 wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby

42! z wykładnikiem $\left[\frac{42}{2}\right] + \left[\frac{42}{4}\right] + \left[\frac{42}{8}\right] + \left[\frac{42}{16}\right] + \left[\frac{42}{32}\right] = 39$,

18! z wykładnikiem $\left[\frac{18}{2}\right] + \left[\frac{18}{4}\right] + \left[\frac{18}{8}\right] + \left[\frac{18}{16}\right] = 16$,

24! z wykładnikiem $\left[\frac{24}{2}\right] + \left[\frac{24}{4}\right] + \left[\frac{24}{8}\right] + \left[\frac{24}{16}\right] = 22$,

skąd widać, że liczba a_{19} jest parzysta, gdyż dzieli się przez 2 w potędze $39 - 16 - 22 = 1$.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl