Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 1998

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 345 (WT=1,46) i 346 (WT=3,07) z numeru 9/1997

Tomasz Rawlik	– Braunschweig	47,24
Maciej Mostowski	– Warszawa	38,72
Witold Bednarek	– Łódź	31,89
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	30,88

Pan Rawlik (z Gliwic) już jedenaście lat temu został Weteranem **Klubu 44 M**; rok później rozstał się z nami, ale nie na zawsze – parę miesięcy temu odezwał się z odległego o tysiąc kilometrów Brunszwiku i włączył ponownie do Ligi, aby oto po raz czwarty zgromadzić magiczne 44 punkty.

Zadania z matematyki nr 361, 362

Redaguje Marcin E. KUCZMA

361. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie k, dla których istnieje wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych spełniający warunki: $P(0) \neq P(1)$, $0 \le P(j) \le k$ dla $j = 0, 1, \ldots, k+1$.

362. Cztery różne okręgi ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 o jednakowym promieniu r przechodzą przez wspólny punkt S i przecinają się kolejno parami:

$$\omega_i \cap \omega_{i+1} = \{S, P_i\} \qquad \text{dla} \quad i = 1,2,3,4 \quad (\omega_5 = \omega_1);$$

przy tym punkty P_1, P_2, P_3, P_4 leżą na okręgu Ω o promieniu R, a środek okręgu Ω leży w odległości d od punktu S. Znaleźć związek (równanie algebraiczne) między liczbami r, R, d. Czy każda trójka liczb dodatnich spełniająca ów związek jest wyznaczona przez pewną czwórkę okręgów ω_1, ω_2, ω_3, ω_4?

Zadanie 362 zaproponował pan Lesław Skrzypek z Rzeszowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1998

Przypominamy treść zadań:

353. Dowieść, że każdą liczbę całkowitą dodatnią da się przedstawić w postaci sumy pewnej liczby składników całkowitych dodatnich nie mających dzielników pierwszych różnych od 2 i 3, przy czym żaden z tych składników nie dzieli się przez żaden inny składnik.

354. Udowodnić nierówność

$$\operatorname{tg}(\sin\theta) < \frac{2\sin\theta}{1+\cos^2\theta} \qquad \text{dla} \quad \theta \in (0, \pi).$$

353. Stosujemy indukcję. Liczba 1 ma omawianą własność. Ustalmy $n \ge 2$ i załóżmy, że każda dodatnia liczba całkowita mniejsza od n ma przedstawienie, o jakim mowa. Należy dowieść, że również liczba n ma takie przedstawienie.

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to wystarczy pomnożyć przez 2 każdy składnik przedstawienia liczby $n/2$. Jeżeli n jest całkowitą potęgą trójki, to nie ma czego dowodzić. Przyjmijmy więc, że n jest liczbą nieparzystą, spełniającą dla pewnej liczby całkowitej $j \ge 1$ nierówność $3^j < n < 3^{j+1}$.

Liczba $k = (n - 3^j)/2$ jest mniejsza od n, więc w myśl przesłanki indukcyjnej $k = \sum 2^{\alpha_i} 3^{\beta_i}$ (dla pewnego układu wykładników $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m \ge 0$), przy czym żaden składnik tej sumy nie dzieli się przez żaden inny składnik. Zauważmy, że $\beta_i < j$ dla $i = 1, \ldots, m$; gdyby bowiem dla pewnego i zachodziła nierówność $\beta_i \ge j$, znaczyłoby to, że $k \ge 3^j$, a więc $n = 3^j + 2k \ge 3^{j+1}$, wbrew określeniu wykładnika j. Zatem wzór

$$n = 3^j + \sum 2^{\alpha_i+1} 3^{\beta_i}$$

daje żądane przedstawienie liczby n; teza zadania wynika na podstawie zasady indukcji.

354. Oznaczając $\sin\theta$ przez x mamy udowodnić nierówność

$$\operatorname{tg} x < \frac{2x}{2-x^2} \qquad \text{dla} \quad x \in (0,1);$$

jest ona równoważna nierówności $f(x) < 1$, gdzie

$$f(x) = \frac{2-x^2}{2x} \operatorname{tg} x.$$

Ponieważ $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$, wystaczy dowieść, że $f'(x) < 0$ dla $x \in (0,1)$; to zaś sprowadza się do wykazania, że

$$(2+x^2)\sin x \cos x > 2x - x^3$$

(pomijamy szczegóły obliczenia pochodnej). Przyjmijmy $y = 2x$; ostatnia nierówność jest równoważna następującej:

$$(8+y^2)\sin y > 8y - y^3.$$

Wobec znanego oszacowania $\sin y > y - y^3/6$ (dla $y > 0$) pozostaje sprawdzić, że

$$y - \frac{y^3}{6} > \frac{8y - y^3}{8+y^2}.$$

Ta prosta nierówność wielomianowa przybiera po przekształceniu postać $y^3(4-y^2) > 0$ i jest spełniona (w szczególności) dla $y \in (0,2)$. Zatem $f'(x) < 0$ dla $x \in (0,1)$, i dowód jest zakończony.

Zadania z fizyki nr 258, 259

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 1998

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 246 (WT=1,25) i 247 (WT=2,85) z numeru 11/1997

Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	42,92
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	27,46
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	18,68
Tomasz Wietecha	– Tarnów	10,76
Aleksander Surma	– Myszków	10,55

258. Jednym ze „ślepych zaułków" w rozwoju motoryzacji były projekty samochodu trójkołowego. Obliczyć maksymalną prędkość v', z jaką taki samochód mógłby na poziomej jezdni wykonać zakręt bez przewrócenia się, jeśli maksymalna prędkość samochodu czterokołowego na tym zakręcie wynosi $v = 60$ km/h. Trójkołowiec ma dwa koła w przedniej osi odległe od siebie o d i jedno koło tylne odległe od środka przedniej osi o l, przy czym tę samą wartość d ma odległość między kołami w osi samochodu czterokołowego. Środek masy obu samochodów leży na tej samej wysokości h nad jezdnią, a nacisk na każde z kół jest jednakowy (w samochodzie stojącym). Pominąć efekty związane z przyspieszaniem lub hamowaniem, a także ze zmianą promienia skrętu (rozpatrujemy ruch jednostajny po okręgu); ponadto przyjąć, że promień skrętu jest znacznie większy od rozmiarów samochodu.

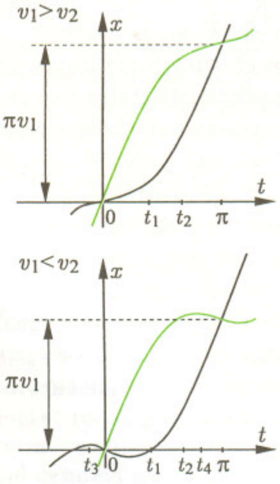
259. Czy można z trzech jednakowych soczewek skupiających skonstruować lunetę powiększającą trzykrotnie i dającą obraz: a) prosty, b) odwrócony? Jeśli tak, to jakie powinny być odległości między kolejnymi soczewkami?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1998

Przypominamy treść zadań:

250. Długopis pozostawia ślad na podłożu wtedy, gdy kąt jego odchylenia od prostopadłej do podłoża nie przekracza wartości α. Jeśli początkowy kierunek długopisu jest zmienną przypadkową, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wirujący długopis spadając na stół pozostawi na nim ślad? Uwzględniamy tylko pierwsze uderzenie o stół. Środek masy długopisu leży w połowie jego długości i porusza się pionowo z prędkością v_1 (przyspieszenie grawitacyjne należy pominąć), a prędkość obiegowa końca długopisu wokół środka jest równa v_2, przy czym płaszczyzna tego ruchu jest pionowa. Liczbową wartość prawdopodobieństwa podać dla $v_1 = 2$ m/s, $v_2 = 3$ m/s i trzech wartości α: 40°, 60°, 85°.

251. W miejscowości A występuje w danej chwili całkowite zaćmienie Słońca, miejscowość B leży na granicy obszaru zaćmienia częściowego, a miejscowość C leży w połowie odległości między A i B. Ile wynosi w przybliżeniu stosunek natężeń oświetlenia powierzchni Ziemi I_C/I_B?



Rys. 1. Wykres funkcji $x_p(t)$ oznaczono kolorem, a funkcji $x_n(t)$ – czernią.

250. Zależność pionowej współrzędnej położenia jednego z końców długopisu (np. piszącego) od czasu wyraża się wzorem $x_p(t) = v_1 t + (v_2/\omega)\sin(\omega t)$, gdzie osi x nadano zwrot w dół, a ω jest prędkością kątową, którą dalej przyjmiemy równą jedności (odpowiada to nieistotnej zmianie skali czasu i położenia). Dla drugiego (niepiszącego) końca plus we wzorze należy zastąpić minusem, tzn. $x_n(t) = v_1 t - v_2 \sin t$. Na rysunku 1 wykresy obu funkcji przedstawiono w dwóch wariantach: $v_1 > v_2$ i $v_1 < v_2$, przy czym $t = 0$ odpowiada chwili, w której długopis jest równoległy do stołu, a $t_1 = (\pi/2) - \alpha$ i $t_2 = (\pi/2) + \alpha$ ograniczają zakres położeń, w których uderzenie pozostawi ślad. Moment uderzenia o stół wyznaczamy jako chwilę, w której którakolwiek z funkcji x_p i x_n przekroczy pewną wartość X, a ponieważ przypadkowy kąt początkowy jest równoważny przypadkowemu wyborowi X, więc szukane prawdopodobieństwo p jest równe stosunkowi długości odcinka na osi pionowej, wewnątrz którego uderzenie następuje pod właściwym kątem, do odcinka $2\pi v_1$ odpowiadającego jednemu obrotowi długopisu. Stąd w przypadku $v_1 > v_2$ rozwiązaniem jest

$$(*) \qquad p = (x_p(t_2) - x_p(t_1))/2\pi v_1 = \alpha/\pi .$$

W przypadku $v_1 < v_2$ musimy rozpatrzyć także lokalne maksima w chwilach t_3 i t_4. Obliczamy

$$\cos t_3 = v_1/v_2, \quad t_3 = -\arccos(v_1/v_2),$$
$$x_n(t_3) = -v_1 \arccos(v_1/v_2) + \sqrt{v_2^2 - v_1^2},$$
$$t_4 = \pi + t_3 = (\pi/2) + \arcsin(v_1/v_2),$$
$$x_p(t_4) = x_n(t_3) + \pi v_1 = v_1 \arcsin(v_1/v_2) + \sqrt{v_2^2 - v_1^2} + \pi v_1/2.$$

Rozwiązanie opisane wzorem (*) pozostanie słuszne pod warunkiem, że $x_p(t_1) > x_n(t_3)$ oraz $t_4 > t_2$, co oznacza, że długopis uderzy w stół pod zbyt dużym kątem i nie zostawi śladu zarówno wtedy, gdy uderzy bardzo mocno (wcześniej niepiszący koniec prawie dotknie stołu), jak i wtedy gdy uderzy bardzo słabo. Tak jest w przypadku $\alpha = 40°$, zatem wtedy $p = 40/180 = 0{,}222$. Gdy $\alpha = 60°$, spełniony jest pierwszy z podanych warunków, ale nie drugi – wtedy prawdopodobieństwo dane jest wzorem

$$p = (x_p(t_4) - x_p(t_1))/2\pi v_1,$$

a wartością liczbową jest $p = 0{,}341$. Dla kąta $\alpha = 85°$ żaden z warunków nie jest spełniony, czyli $p = 0{,}5$ (każde uderzenie piszącym końcem pozostawia ślad).

Rys. 2

251. Przyjmijmy następujące uproszczenia (z których żadne nie wprowadza do wyniku błędów przekraczających kilku procent): średnica tarczy Słońca jest równa średnicy tarczy Księżyca, tzn. całkowite zaćmienie występuje tylko w jednym punkcie; pomijamy zakrzywienie powierzchni Ziemi na drodze ACB; jasność powierzchniową tarczy słonecznej uważamy za stałą. Przy tych założeniach obserwator w C stwierdzi, że zasłaniająca Słońce tarcza Księżyca jest przesunięta względem tarczy Słońca o promień obu okręgów, a pole części niezasłoniętej (rys. 2) wynosi $r^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Stąd $I_C/I_B \approx \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0{,}61$.