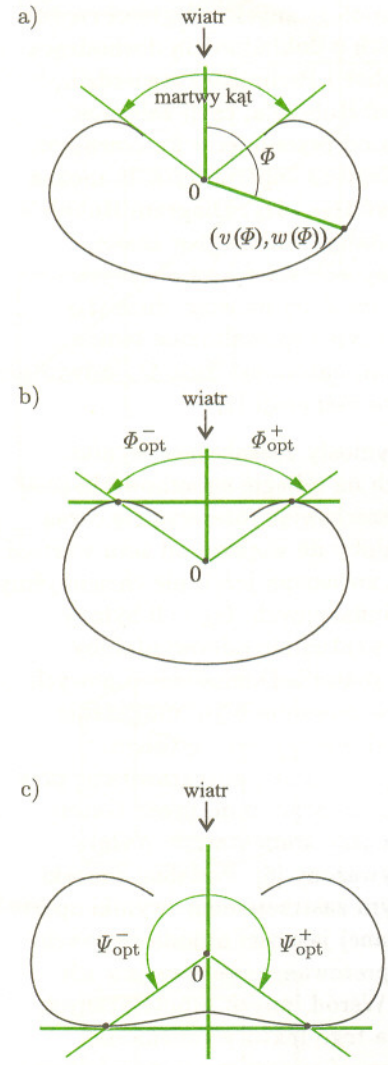
Jak żeglować, czyli o Matematycznej Teorii Sterowania

Bronisław JAKUBCZYK

Matematyczna teoria sterowania zajmuje się badaniem własności układów sterowania oraz rozwiązywaniem problemów sterowania dla różnych klas takich układów.



Rys. 1. a), b) żaglówka, c) bojer.

Skończenie wymiarowy układ sterowania jest opisywany przez *przestrzeń stanu* tego układu oraz przez zbiór dopuszczalnych prędkości układu. Zmieniający się w czasie *stan układu*, z, interpretowany jako uogólnienie „położenia układu", to element przestrzeni stanu Z (przestrzeni położeń układu). Zależy on od (zmiennej w czasie) prędkości, która z kolei zależy od drugiej, również zmiennej w czasie wielkości zwanej *sterowaniem*. Przestrzeń stanu musi być tak dobrana, by stanowiła pełną pamięć układu. Znaczy to, że *przy danym stanie początkowym $z(t_0)$ oraz danym sterowaniu jako funkcji czasu $t \in [t_0, t_1]$ stan układu $z(t)$ jest wyznaczony jednoznacznie na całym odcinku $[t_0, t_1]$.*

Rozważmy prosty przykład. Załóżmy, że obserwujemy z dużej wysokości (np. z samolotu) jezioro, po którym pływa żaglówka. Jeśli wiatr ma stały kierunek i siłę, a doświadczony żeglarz dobiera położenie żagli i steru optymalnie do kierunku płynięcia i kierunku wiatru, to zachowanie żaglówki charakteryzuje wykres jej prędkości w zależności od jej kierunku do wiatru. Przykładowy wykres jest pokazany na rysunku 1. Stanem naszego układu jest punkt na powierzchni jeziora, opisany dwiema współrzędnymi kartezjańskimi, a przestrzenią stanu powierzchnia jeziora. Sterowaniem jest kąt między osią łodzi i kierunkiem wiatru. Wreszcie, sam układ sterowania jest charakteryzowany przez zbiór prędkości, dokładniej, przez zależność prędkości od sterowania, tj. od kąta do wiatru.

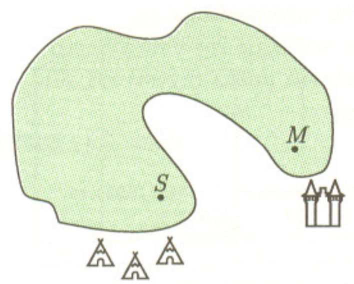
Oznaczmy przez x i y współrzędne kartezjańskie łódki, a przez $v(\Phi)$ oraz $w(\Phi)$ – współrzędne jej prędkości przy kącie do wiatru Φ. Ruch łódki możemy zapisać (jako układ sterowania) w postaci równań

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(\Phi), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = w(\Phi),$$

gdzie $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ i $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ oznaczają prędkości zmian odpowiednio x i y (matematycznie są to pochodne funkcji $x(t)$ oraz $y(t)$, jednak dla analizy układu nie będzie to istotne), a funkcje $v(\Phi)$ oraz $w(\Phi)$ są dane za pomocą wykresu (rys. 1).

Najprostszym problemem sterowania jest *problem sterowalności*: pytamy, czy układ można przeprowadzić z punktu z_0 do punktu z_1 za pomocą pewnego sterowania. Jeśli odpowiedź jest twierdząca dla dowolnych punktów z_0 i z_1 przestrzeni stanu Z, to mówimy, że układ jest sterowalny.

Czy układ opisujący żaglówkę jest sterowalny? Czytelnik odpowie zapewne: *tak.* Oczywiście, kiedy kierunek od punktu z_0 do punktu z_1 nie leży w martwym kącie, można wybrać jako sterowanie stały kąt, odpowiadający kierunkowi od z_0 do z_1. Gdy kierunek od punktu z_0 do punktu z_1 leży w martwym kącie, należy zmieniać kierunek łódki tak, by na przemian mieć wiatr z prawej lub z lewej (rys. 1b). W języku żeglarskim nazywamy to *halsowaniem.* W ten sposób możemy dotrzeć z punktu z_0 do punktu z_1 leżącego w stosunku do z_0 dokładnie „pod wiatr", a także omijać przeszkody.

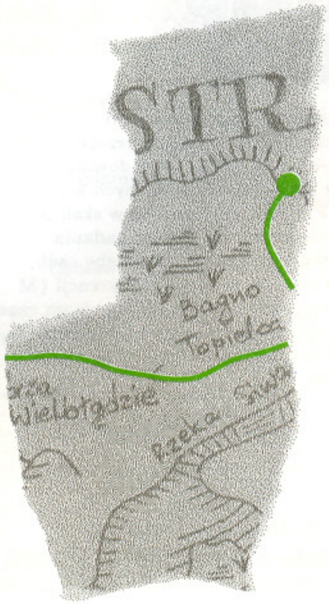


Rys. 2

Drugim często stawianym problemem jest *problem optymalnego sterowania.* Polega on np. na znalezieniu sterowania, które przeprowadzi nasz układ z punktu z_0 do punktu z_1, minimalizując przy tym jakąś ważną dla nas wielkość, np. energię, koszt lub czas.

W regatach żeglarskich wielkością minimalizowaną jest czas dotarcia do mety. Możemy więc sformułować *problem optymalno-czasowy* dla naszej żaglówki tak. Zakładamy, że dany jest akwen, czyli przestrzeń stanu Z, siła i kierunek wiatru oraz żaglówka (którą opisuje zależność prędkości od kąta do wiatru).

Dla danych punktów z_0 i z_1 w Z szukamy optymalnego sterowania (tzn. kąta żaglówki w stosunku do wiatru jako funkcji czasu), które przeprowadzi łódkę z położenia z_0 do z_1.



Proponujemy Czytelnikowi rozwiązanie dwu elementarnych zadań dla uczestników regat żeglarskich.

Zadanie 1. Oznaczmy przez Φ^+_{opt} oraz Φ^-_{opt} kąty, przy których rzut prędkości łódki na kierunek „prosto pod wiatr" jest maksymalny (rys. 1b). Pokaż, że jeśli meta (punkt z_1) leży w martwym kącie, gdy patrzymy z punktu startu z_0, to dowolne sterowanie, które stosuje naprzemiennie kąty Φ^+_{opt} oraz Φ^-_{opt} i przeprowadza łódkę z położenia z_0 w z_1, przeprowadza ją w minimalnym czasie, niezależnym od wybranej drogi.

Zadanie 2. Znajdź sterowanie minimalno-czasowe przeprowadzające łódkę z punktu startu S do mety M na akwenie przedstawionym na rysunku 2.

Czytelnik, który kiedykolwiek obserwował regaty bojerowe, zauważył zapewne ze zdziwieniem, że bojery halsują również wtedy, gdy poruszają się z wiatrem. Wynika to z tego, że charakterystyka prędkości bojera w zależności od kąta do wiatru ma zaklęśnięcie do wewnątrz również w kierunku „z wiatrem", jak na rysunku 1c. Sternik bojera maksymalizuje więc rzut prędkości na kierunek „dokładnie z wiatrem", wybierając jeden z kierunków Ψ^+_{opt} oraz Ψ^-_{opt}.

Z analizy tych przykładów możemy wysnuć ogólny wniosek. Zjawisko halsowania, tzn. kolejnej zmiany kierunków prędkości między skończoną ich liczbą (równą 2 w przestrzeni o wymiarze 2) występuje wtedy, gdy zbiór prędkości nie jest wypukły.

Artykułu o samochodzie z przyczepkami szukajcie w *Delcie* 7/1998.

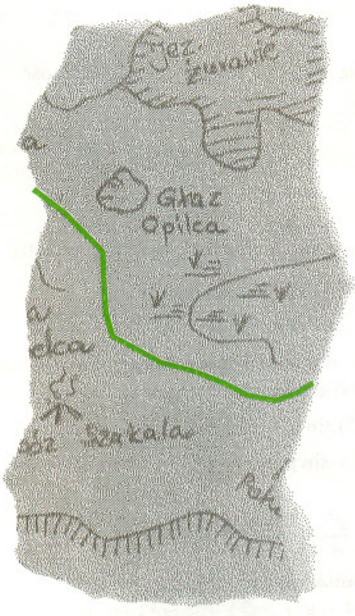
W następnym artykule opiszemy model matematyczny i niektóre problemy sterowania dla samochodu z przyczepkami.

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 844. Na każdej z $n > 2$ planet jest astronom, który obserwuje najbliższą planetę. Zakładając, że n jest liczbą nieparzystą, a odległości między planetami są parami różne, dowieść, że istnieje planeta nieobserwowana.
Rozwiązanie na str. 5

M 845. Dowieść, że spośród n-kątów opisanych na danym kole, n-kąt foremny ma najmniejsze pole.
Rozwiązanie na str. 6



M 846 (Problem Fagnano). Dany jest trójkąt ostrokątny SLD. Wśród takich trójkątów ROP, że $R \in SL$, $O \in LD$, $P \in DS$ znaleźć trójkąt o minimalnym obwodzie.
Rozwiązanie na str. 4

Przygotował Stanisław BAŻAŃSKI

F 475. Źródło światła znajduje się w punkcie Z o współrzędnych $(0, a)$, przy czym wymiar przestrzeni w kierunku prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez promień padający i załamany został zaniedbany. Posługując się warunkiem koniecznym wynikającym z zasady Fermata, że w przybliżeniu optyki geometrycznej promień światła rozchodzi się po drodze o najkrótszym czasie przebiegu, określić, w jakim kierunku należy wysłać światło, żeby dotarło do punktu E ekranu o współrzędnych $(d, -b)$, zakładając, iż w ośrodku w półpłaszczyźnie $y > 0$ światło rozchodzi się z prędkością v_1, a dla $y < 0$ prędkość ta jest równa v_2. Wyprowadzić stąd prawo Snelliusa.
Rozwiązanie na str. 4

F 476. W sytuacji opisanej w zadaniu **F 475** wykazać, stosując rozumowanie geometryczne, że czas przebiegu światła od Z do E wzdłuż drogi rzeczywistej, spełniającej prawo Snelliusa, jest mniejszy niż wzdłuż dowolnej innej hipotetycznej drogi łączącej te punkty, składającej się z dwóch odcinków ze wspólnym punktem na granicy ośrodków.
Rozwiązanie na str. 3